Génie logiciel avancé

Mihaela Sighireanu

UFR d'Informatique Paris Diderot, LIAFA, 175 rue Chevaleret, Bureau 6A7
http://www.liafa.jussieu.fr/∼sighirea/cours/genielog/

Spécification formelle des comportements: la méthode B

Résumé

Objectifs

- Montrer comment les techniques de spécification formelles aident à découvrir des problèmes dans la spécification du système.
- (Cours précédent :) Définir et utiliser les techniques algébriques de spécification (ADT) pour spécifier les interfaces.
  $\Rightarrow$ le modèle mathématique est une algèbre de termes.
- Définir et utiliser des techniques basées sur les modèles pour la spécification des comportements.
  - comportements séquentiels : VDM, Z, B
  - comportements parallèles : algèbre de processus, automates hiérarchiques, réseaux de Petri, etc.

Motivation

Spécification formelle des comportement :

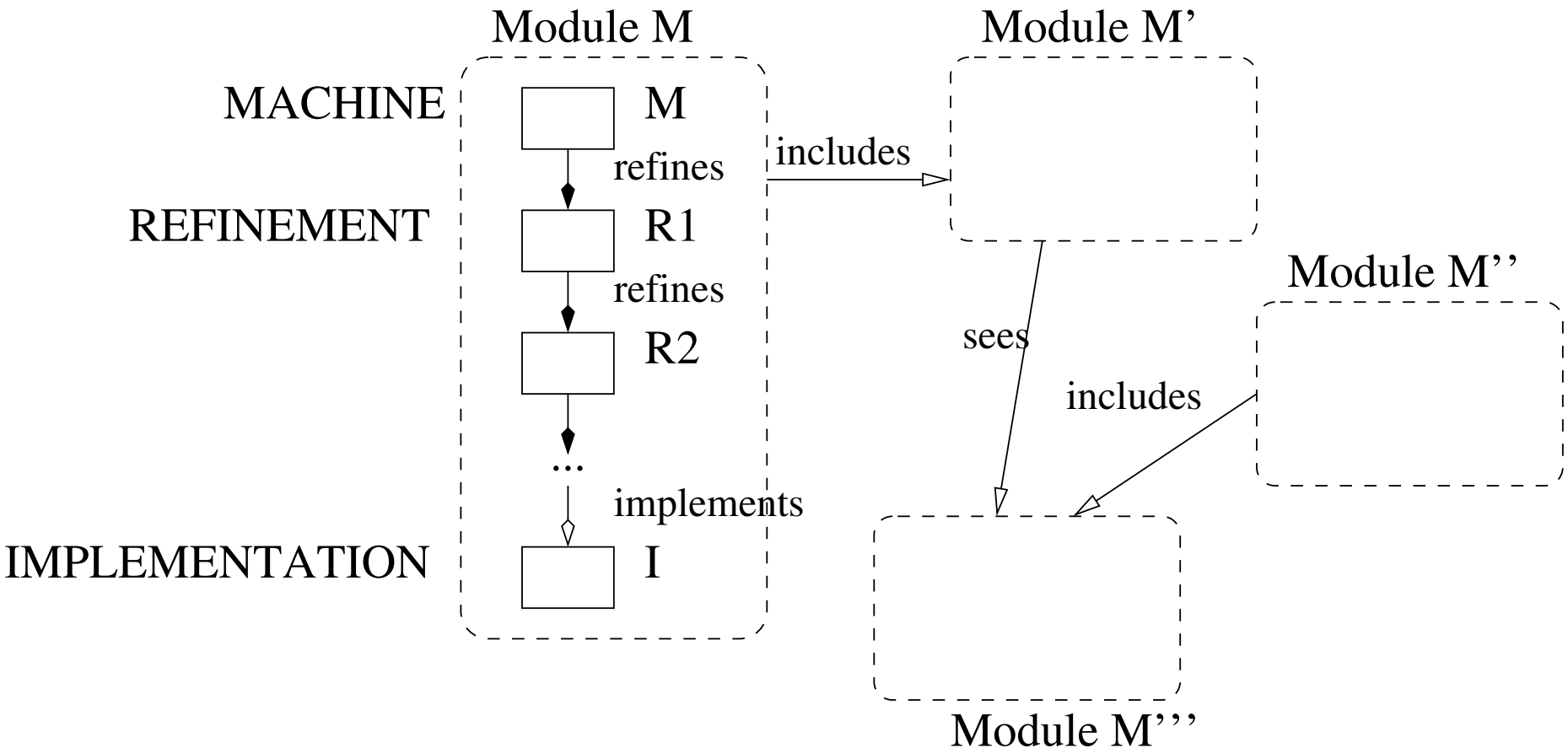
- La spécification d'interfaces permet de spécifier le "quoi" (sortes, opérations et leur propriétés algébriques) sans nous dire le "comment" (état, implémentation) !
- La spécification de comportements s'approche de l'implémentation et formalise l'essentiel d'un langage de programmation :
  - VDM (Johnes), Z (Abrial) : logique de Hoare avec opérations = prédicats
  - B (Abrial) : logique de Hoare avec opérations = substitutions généralisées
- Les deux types de spécifications sont complémentaires.
  Par exemple, la spécification d'un système de fichiers Unix :
  - Spécification d'interface : sorte arbre et opérations générales sur un arborescence.
  - Spécification de comportement : état = (arborescence, home dir, crt dir) et des opérations qui changent l'état.

Méthode B

Principes :

- Ecriture de spécifications à état
  - formalisation rigoureuse mais accessible car basée sur la théorie des ensembles et la logique du premier ordre
- Preuve de propriétés sur les données
  - en utilisant le calcul de plus faibles pré-conditions
- Raffinement et génération de code
  - introduction progressive de la complexité ...
  - ... jusqu'à une représentation informatique des données
- Construction incrémentale
  - des spécifications, des développements et des preuves
- Méthodologie et outillage
  - vaste documentation disponible : `www.atelierb.eu`
  - outil en licence libre : Atelier B
  - génération de code Ada et C

Structure de la spécification



Structure de la spécification

Une unité de compilation en B est :

MACHINE décrit un comportement de manière abstraite par son état et ses opérations ; c'est la base de la spécification d'un comportement.

REFINEMENT (raffinement) est une étape du développement d'une machine ; il détaille la structure et les opérations de la machine ; il génère des obligation de preuve de cohérence du raffinement.

IMPLEMENTATION est le dernier maillon du développement d'une machine, le plus proche du codage ; il génère des obligations de preuve pour les blocs d'instruction utilisés.

Un module = chaîne de développement constitué
d'une MACHINE M,
0 ou plusieurs REFINEMENT successifs de M (R_M^1,..., R_M^n) et
une IMPLEMENTATION I.

- Les modules communiquent par appel d'opérations.
- Ils permettent une spécification (et preuve) incrémentale.

Machines abstraites : structure de la spécification

- Partie entête :
  - nom de la machine
  - (optionnel) paramètres de la machine
  - (optionnel) contraintes sur les paramètres
- Partie statique :
  - déclaration d'ensembles
  - déclaration de constantes
  - propriétés des constantes
  - variables (état)
  - invariant (caractérisation de l'état)
- Partie dynamique :
  - initialisation de l'état
  - opérations

MACHINE $M(X, u)$
CONSTRAINTS
$C(u)$
SETS
$S; T = \{a, b\}$
CONSTANTS
c, d
PROPERTIES
$R(c, d)$
VARIABLES
x, y
INVARIANT
$I(x, y, c, d, u)$
INITIALISATION
$U(x, y)$
OPERATIONS
$r \leftarrow op(p) =$ **PRE** P **THEN** K **END**;
...
END

Exemple : machine de la division entière

MACHINE
DIVISION
OPERATIONS
$qq, rr \leftarrow div(aa, bb) =$ `/* qq et rr sont le quotient resp. le reste */`
PRE `/* de la division entière de` aa `par` bb `*/`
$aa \in \mathbf{NAT} \wedge bb \in \mathbf{NAT}_1$
THEN
ANY ss, tt **WHERE**
$ss \in \mathbf{NAT} \wedge tt \in \mathbf{NAT} \wedge aa = bb * ss + tt \wedge tt < bb$
THEN
$qq, rr := ss, tt$
END
END
END

Note : ci-dessus on utilise la syntaxe concrète mathématique, voir démo Atélier B pour la syntaxe concrète et la feuille mémo B.

Définition de base d'ensembles

Un nouveau ensemble peut être défini explicitement :

- soit de manière abstraite (fini ou infini), en définissant uniquement son nom :
  SETS ADRESSES
- soit de manière concrète (fini) en énumérant ses valeurs :
  SETS FEUX $=$ { rouge, jaune, vert }

Ensembles prédéfinis : **BOOL, NAT, NAT1, INT, CHAR, STRING** et les sous-ensembles d'entiers $m..n$.

Prédicats et opérations sur les ensembles

Les prédicats usuels sont disponibles sur les ensembles :

$\in$	appartient à	$\notin$	n'appartient pas à
$\subseteq$	est inclus dans	$\not\subseteq$	n'est pas inclus dans
$\subset$	est strictement inclus dans	$\not\subset$	n'est pas strictement inclus dans

Les opérateurs à résultat entier sur les ensembles :

`card`	nb d'éléments d'un ensemble	`card`(E)
`min`	minimum d'un ensemble non vide d'entiers	`min`(E)
`max`	maximum d'un ensemble non vide d'entiers	`max`(E)

Expressions d'ensemble

Les ensembles peuvent être définis implicitement en utilisant des expressions d'ensemble E.

$\emptyset$	ensemble vide	$E \times E$	produit cartésien
$\mathbb{P}(E)$	ensemble de sous-ens.	$\mathbb{P}_1(E)$	ens. de sous-ens. non vides
$\{x \mid P\}$	déf. en compréhension	$\{E, ..., E\}$	déf. en extension
$E - E$	différence		
$E \cup E$	union	$E \cap E$	intersection
$\texttt{union}(E)$	union des sous-ens. de E	$\texttt{inter}(E)$	inter. des sous-ens. de E
$\bigcup Id \cdot (P \mid E)$	union quantifiée	$\bigcap Id \cdot (P \mid E)$	intersection quantifiée

Exemples :

$$\begin{aligned} \texttt{union}(\{\{1,2\},\{1,2,3\},\{2,4,5\}\}) &= \{1,2,3,4,5\} \\ \texttt{inter}(\{\{1,2\},\{1,2,3\},\{2,4,5\}\}) &= \{2\} \\ \bigcup x \cdot (x \in \{2,4\} \mid \{y \mid y \in \mathbb{N} \wedge x - 1 \leq y \leq x + 1\}) &= \{1,2,3,4,5\} \end{aligned}$$

Relations

Mathématiquement, les relations sont un cas particulier de construction d'ensemble, car r est une relation entre s et t si $r \in \mathbb{P}(s \times t)$.

Principaux constructeurs de relations (voir mémo B pour une liste complète) :

Expression	Définition	Sémantique & Condition
$s \leftrightarrow t$	$\mathbb{P}(s \times t)$	les relations entre s et t
$\mathtt{dom}(r)$	$\{x \mid x \in s \wedge \exists y.\ y \in t \wedge (x,y) \in r\}$	domaine de $r \in s \leftrightarrow t$
$\mathtt{ran}(r)$	$\{y \mid y \in t \wedge \exists x.\ x \in s \wedge (x,y) \in r\}$	co-domaine de $r \in s \leftrightarrow t$
$r[u]$	$\{y \mid y \in t \wedge \exists x.\ x \in u \wedge (x,y) \in r\}$	image par u, $r \in s \leftrightarrow t \wedge u \subseteq s$
r^{-1}	$\{(y,x) \mid (x,y) \in r\}$	inverse d'une relation $r \in s \leftrightarrow t$
$\mathtt{id}(s)$	$\{(x,x) \mid x \in s\}$	relation identité sur l'ens. s
$r_1; r_2$	$\{(x,z) \mid \exists y.\ (x,y) \in r_1 \wedge (y,z) \in y_2\}$	composition séquentielle $r_1 \in s \leftrightarrow t, r_2 \in t \leftrightarrow u$

Exercice : $r_1 = \{(0,2),(1,5),(2,5),(2,7)\}$ et $r_2 = \{(0,0),(2,-1),(5,8),(6,9)\}$ alors $r_1; r_2 = \ldots$?

Fonctions

Mathématiquement, une fonction est une relation dont chaque élément du domaine est associé à au plus un élément du co-domaine.

Principaux constructeurs de fonctions :

Expression	Définition	Sémantique
s +-> t	$\{r \mid r \in s \leftrightarrow t \wedge$	
	$\quad \forall x, y, z.(x, y) \in r \wedge (x, z) \in r \Rightarrow (y = z)\}$	f. partielle
s --> t	$\{f \mid d \in s$+->$t \wedge \mathtt{dom}(f) = s\}$	f. totale
s >+> t	$\{f \mid f \in s$+->$t \wedge f^{-1} \in t$+->$s\}$	f. injective partielle
s >-> t	s>+>$t \cap s$-->t	f. injective totale
$\lambda f \cdot (P \mid E)$		déf. explicite

Exemple : $\lambda x \cdot (x \in \mathtt{NAT} \mid x + 2)$.

Séquences

Mathématiquement, une séquence est un typé particulier de fonction dont le domaine est un intervalle d'entiers et le co-domaine est l'ensemble des éléments de la séquence.

Principaux constructeurs de séquences :

Expression	Définition	Sémantique
$\texttt{seq}(E)$	$\bigcup n \cdot (n \in \texttt{NAT} \mid 1..n \texttt{-->} E\})$	séq. finies d'élément de E
$\texttt{seq}_1(E)$	$\texttt{seq}(E) - \emptyset$	séq. non vides
$\texttt{perm}(E)$		séq. bijectives ou permutations

Valeurs de séquences : [] (séq. vide), $[a, b, c]$

Opérateurs classiques : `size`, ^ (concaténation), <- (ajout à droite), `rev` (inversion), `first`, `last`, `tail`, `front` (tous sauf le dernier).

Exercice : Montrer que $\texttt{front}(s)\texttt{<-}\texttt{last}(s) = s$.

Exemples

Ex. 1 : On veut spécifier une opération d'allocation d'un mot dans la mémoire ; elle retourne l'adresse de l'emplacement alloué, s'il y a de la place en mémoire.

Modélisation des ensembles et de l'état :

MACHINE *MEMORY*
SETS
  ADDRESSES — ensemble abstrait d'adresses
CONSTANTS
  mem, *null*
PROPERTIES
  $mem \subseteq ADDRESSES \ \wedge$ — les adresses à allouer
  $null \in ADDRESSES \ \wedge$ — une adresse particulière
  $null \notin mem$ — l'adresse *null* n'est pas dans la mémoire
VARIABLES
  free
INVARIANT
  $free \subseteq mem$ — l'ensemble des adresses libres

Exemples

Ex. 2 : Un ascenseur qui a une porte à chaque étage et on ne distingue pas les appels intérieurs de ceux extérieurs ; pas de pannes.

Modélisation des ensembles et de l'état :

MACHINE *LIFT*
SETS
$MODE = \{stop, moving\}$ — état de l'ascenseur
CONSTANTS
$max\_floors, FLOORS$
PROPERTIES
$max\_floors \in \mathtt{NAT}_1 \land FLOORS = 0..max\_floors$ — ensemble d'étages
VARIABLES
$openf, callf, pos, mode$
INVARIANT
$openf \subseteq FLOORS \land$ — ensemble portes ouvertes
$callf \subseteq FLOORS \land$ — ensemble d'appels faits
$pos \in FLOORS \land$ — position courante
$mode \in MODE$ — mode courant

Spécification d'opérations

Rappels :

- Logique des programmes (Hoare) : correction partielle

$$P \ \{S\} \ Q$$

  Si l'état satisfait P avant S et si S termine, alors l'état satisfait Q après.

- Plus faible précondition : correction totale

$$wp(S, Q)$$

  Si l'état satisfait $wp(S, Q)$ avant S alors S termine et l'état satisfait Q après.
  Remarque : $P\{S\}Q$ en correction totale est équivalent à $P \Rightarrow wp(S, Q)$.

- En B, la plus faible précondition $wp(S, Q)$ est notée sous la forme d'une substitution $[S]Q$.

Langage des substitutions généralisées

Notation	Syntaxe	$wp(S, Q)$	Description
$x := E$		$[x := E]Q$	subst. simple
$x, y := E, F$		$[z := F]$	subst. multiple
		$[x := E][y := z]Q$	
skip		Q	subst. sans effet
$P \mid S$	**PRE** P **THEN** S **END**	$P \wedge [S]Q$	subst. préconditionnée
$P \Rightarrow S$	**SELECT** P **THEN** S **END**	$P \Rightarrow [S]Q$	subst. gardée
$S[]T$	**CHOICE** S **OR** T **END**	$[S]Q \wedge [T]Q$	subst. de choix borné
$@z \cdot S$	**VAR** z **IN** S **END**	$\forall z.[S]Q$	subst. de choix non borné
$S; T$		$[S][T]Q$	séquencement
$\mathcal{W}(P, S, J, V)$	**WHILE** P **DO** S **INVARIANT** J **VARIANT** V **END**		subst. d'itération

Langage de substitutions généralisées (suite)

Traduction	Syntaxe dérivée	Description
$(P \Rightarrow S)[]$ $(\neg P \Rightarrow T)$	**IF** P **THEN** S **ELSE** T **END**	subst. conditionnelle
$@z \cdot (P \Rightarrow S)$	**ANY** z **WHERE** P **THEN** S **END**	choix gardé
$S \Vert T$	...	subst. multiple généralisée
x :=bool(P)	x := **IF** P **THEN TRUE ELSE FALSE**	conversion P en valeur booléenne
$f(x)$:=E	f :=f<+$\{(x, E)\}$	surcharge fonction

Exemples

Ex. 1 : On veut spécifier une opération d'allocation d'un mot dans la mémoire ; elle retourne l'adresse de l'emplacement alloué, s'il y a de la place en mémoire.

Modélisation de l'opération :

INITIALISATION
  $free$ **:=** mem
OPERATIONS
  $rr \leftarrow alloc =$ — entête de l'opération
  IF $free \neq \emptyset$ **THEN** — test dynamique
    ANY vv **WHERE**
      $vv \in free$ — choix d'une adresse libre
    THEN
      $free, rr$ **:=** $free - \{vv\}, vv$ — modification de l'état et retour de l'adresse allouée
    END
  ELSE
    rr **:=** $null$ — retour valeur de non allocation
  END ;

Exemples

Ex. 2 : Un ascenseur qui a une porte à chaque étage et on ne distingue pas les appels intérieurs de ceux extérieurs ; pas de pannes.

Modélisation des ensembles et de l'état :

INVARIANT

$openf \subseteq FLOORS \ \wedge \ callf \subseteq FLOORS \ \wedge$

$pos \in FLOORS \ \wedge \ mode \in FLOORS \ \wedge$

$openf \neq \emptyset \Rightarrow (openf = \{pos\} \wedge mode = stop) \ \wedge$ sûreté

$mode = stop \Rightarrow pos \notin callf$

INITIALISATION

$openf$ **:=** $\emptyset \| callf$ **:=** $\emptyset \| pos$ **:=** $0 \| mode$ **:=** $stop$

OPERATIONS

*move***=** actualise *pos*

PRE $openf = \emptyset$ **THEN** bouge que si porte non ouverte

IF $callf = \emptyset$ **THEN** $mode$ **:=** $stop$ pas d'appel, arrêt

ELSE

ANY nn **WHERE**

$nn : callf \ \wedge \ nn \neq pos$ un étage avec appel

THEN

$mode, pos$ **:=** $moving, nn$

END END END ;

Obligations de preuve

MACHINE
$M(X, u)$
CONSTRAINTS
C
SETS
$S; T = \{a, b\}$
CONSTANTS
c
PROPERTIES
R
VARIABLES
x
INVARIANT
I
INITIALISATION
U
OPERATIONS
$r \leftarrow op(p) =$ **PRE** P **THEN** K **END** ;

Notations :

$$\begin{aligned} A &= C \wedge x \in \mathbb{P}_1(\mathtt{INT}) \\ B &= R \wedge S \in \mathbb{P}_1(\mathtt{INT}) \\ &\quad \wedge T \in \mathbb{P}_1(\mathtt{INT}) \\ &\quad \wedge T = \{a, b\} \wedge a \neq b \end{aligned}$$

Preuve que l'initialisation établit l'invariant :

$$A \wedge B \Rightarrow [U]I$$

Preuve de préservation d'invariant pour chaque opération op :

$$A \wedge B \wedge I \wedge P \Rightarrow [K]I$$

Obligations de preuve : exemple

Ex. 1 : Allocation mémoire.

$$\begin{array}{lcl} A & = & true \\ B & = & mem \subseteq ADDRESSES \ \wedge \ null \in ADDRESSES \ \wedge \ null \notin mem \\ & & \wedge \ ADDRESSES \in \mathbb{P}_1(\mathtt{INT}) \end{array}$$

Preuve que l'initialisation établit l'invariant :

$$B \ \Rightarrow \ [free \ := mem](free \subseteq mem)$$

Preuve de préservation d'invariant pour l'opération *alloc* :

$$B \ \wedge \ free \subseteq mem \ \Rightarrow \ [alloc](free \subseteq mem)$$

$\Leftrightarrow$

$$B \ \wedge \ free \subseteq mem \ \Rightarrow \ \left(\begin{array}{l} (free \neq \emptyset \Rightarrow (\forall vv \in free \Rightarrow (free - \{vv\} \subseteq mem))) \\ \wedge \\ (free = \emptyset \Rightarrow (free \subseteq mem)) \end{array} \right)$$

Relation définie par une substitution

Un substitution généralisée S définit une relation entre les valeurs (en b) d'une variable x avant et après S, c'est-à-dire $\mathtt{prd}_x(S) \in b \leftrightarrow b$.
Notation : x variables avant, x' variables après.
Syntaxe : $x\$0$ dénote la valeur de x avant la substitution dans les prédicats P.

$$
\begin{array}{rcl}
\mathtt{prd}_x(x := E) & \Leftrightarrow & x' = E \\
\mathtt{prd}_{x,y}(x := E) & \Leftrightarrow & x' = E \wedge y' = y \\
\mathtt{prd}_x(\mathtt{skip}) & \Leftrightarrow & x' = x \\
\mathtt{prd}_x(P \mid S) & \Leftrightarrow & P \Rightarrow \mathtt{prd}_x(S) \\
\mathtt{prd}_x(P \Rightarrow S) & \Leftrightarrow & P \wedge \mathtt{prd}_x(S) \\
\mathtt{prd}_x(S [] T) & \Leftrightarrow & \mathtt{prd}_x(S) \vee \mathtt{prd}_x(T) \\
\mathtt{prd}_x(@z \cdot S) & \Leftrightarrow & \exists z \cdot \mathtt{prd}_x(S) \quad \text{si } z \text{ n'est pas modifié par } S \\
\mathtt{prd}_x(@y \cdot S) & \Leftrightarrow & \exists (y, y') \cdot \mathtt{prd}_{x,y}(S) \quad \text{si } y \text{ est modifié par } S \\
\mathtt{prd}_x(x :\in E) & \Leftrightarrow & x' \in E \\
\mathtt{prd}_x(x : P) & \Leftrightarrow & [x\$0, x := x, x']P \\
\mathtt{prd}_x(S; T) & \Leftrightarrow & S \text{ termine } \Rightarrow \exists x'' \cdot ([x' := x'']prd_x(S) \ \wedge \ [x := x'']prd_x(T)) \\
\mathtt{prd}_x(\mathcal{W}(P, S, J, V)) & \Leftrightarrow & \mathcal{W} \text{ termine } \Rightarrow [x\$0, x := x, x'](J \wedge \neg P)
\end{array}
$$

Raffinements de machines

- Raffinement = étape de développement d'une machine.
- Un raffinement détaille et précise les structures de données et les opérations de la machine.
- Les obligations de preuve du raffinement assurent que le raffinement est cohérent avec la sémantique de la machine.

Trois types :

- Simple : sans changement de variables d'états
- De composante : avec changement (ajout, suppression) de variables d'état
- Pas à pas : composition (en séquence) de raffinements

Raffinement simple

Soit x l'ensemble de variables d'état.

Definition

Une substitution S est raffinée par un substitution T, notation $S \sqsubseteq T$, ssi pour tout prédicat R on a $[S]R \Rightarrow [T]R$.

$\Leftrightarrow$ l'effet de T sur les variables x est un des effets de S, c'est-à-dire qu'en T se produit :

- une diminution du non-déterminisme et/ou
- un affaiblissement des pré-conditions

Exemples : Prouver que

$$\begin{aligned} (x := 1 [] x := 2) &\sqsubseteq x := 1 \\ (x > 4 \mid x := x + 1) &\sqsubseteq (x \geq 0 \mid x := x + 1) \end{aligned}$$

Raffinement avec changement de représentation

Soient :
– x l'ensemble de variables d'état (initial) avec valeurs en b.
– y un ensemble de variables d'état (raffiné) avec valeurs en c.
– v une relation telle que $v \in c \leftrightarrow b \ \wedge \ \mathtt{dom}(v) = c$

Definition

Une substitution S est raffinée par un substitution T via la relation v, notation $S \sqsubseteq_v T$, ssi $v(y,x) \wedge \mathtt{prd}_y(T) \Rightarrow \exists x' \cdot (\mathtt{prd}_x(S) \wedge v(y',x'))$.

La relation v peut être décrite en extension $\{(y,x) \mid L\}$.

Exemple :

$$\begin{array}{rcl} mstate & : & mem \rightarrow BOOL \\ v & = & \{(mstate, free) \mid free = mstate^{-1}[\{FALSE\}]\} \\ (free := mem) & \sqsubseteq_v & (mstate := mem \times \{FALSE\}) \end{array}$$

Machine et raffinement : syntaxe

MACHINE
$M(X, u)$
CONSTRAINTS
C
SETS
G
CONCRETE_CONSTANTS
c
ABSTRACT_CONSTANTS
a
PROPERTIES
R
VARIABLES
x
INVARIANT
I
INITIALISATION
U
OPERATIONS
$r \leftarrow op(p) =$ **PRE** P **THEN** K **END** ;
...
END

REFINEMENT
$N(X, u)$
REFINES
M
SETS
H
CONCRETE_CONSTANTS
d
ABSTRACT_CONSTANTS
b
PROPERTIES
O
VARIABLES
y
INVARIANT
J
INITIALISATION
V
OPERATIONS
$r \leftarrow op(p) =$ **PRE** Q **THEN** L **END** ;
...
END

Machine et raffinement : contraintes

- les paramètres doivent être répétés dans l'entête et pas de contraintes ;
- les ensembles H doivent être nouveaux ;
- les constantes abstraites a doivent être raffinées (en utilisant b ou d) par la relation donnée par le prédicat O ;
- les constantes d ont des nouveaux noms ;
- la relation de raffinement est $v = \{(y, x) \mid I \wedge J\}$;
- les opérations redéfinies en N gardent les mêmes entêtes (liste résultats, nom, liste paramètres).

Machine construite par le raffinement

Soit $B_N = O \wedge H \in \mathbb{P}_1(\mathtt{INT})$.
S'il existe une preuve pour les obligations de preuve suivantes :

- Preuve de l'initialisation :
  $A \wedge B \wedge B_N \Rightarrow [N]\neg[U]\neg J$
- Preuve de pré-condition raffinée :
  $A \wedge B \wedge B_N \wedge I \wedge J \wedge P \Rightarrow Q$
- Preuve conservation de l'invariant par une opération sans résultat :
  $A \wedge B \wedge B_N \wedge I \wedge J \wedge P \Rightarrow [L]\neg[K]\neg J$
- Preuve conservation de l'invariant par une opération avec résultat :
  $A \wedge B \wedge B_N \wedge I \wedge J \wedge P$
  $\Rightarrow [[r := r']L]\neg[K]\neg(J \wedge r = r')$

alors par raffinement on définit "virtuellement" la machine ci-contre.

MACHINE
  $N_M(X, u)$
CONSTRAINTS
  C
SETS
  $G; H$
CONCRETE_CONSTANTS
  c, d
ABSTRACT_CONSTANTS
  b
PROPERTIES
  $\exists a \cdot (R \wedge O)$
VARIABLES
  y
INVARIANT
  $\exists x \cdot \exists a \cdot (R \wedge O \wedge I \wedge J)$
INITIALISATION
  V
OPERATIONS
  $r \leftarrow op(p) =$
    PRE $Q \wedge \exists x \cdot \exists a(R \wedge O \wedge I \wedge J \wedge P)$
    THEN L **END**;

Raffinement : exemple

Ex. 1 : Allocation mémoire.

REFINEMENT
MEMORY_r1
REFINES
MEMORY
VARIABLES
mstate
INVARIANT
$mstate : mem \rightarrow BOOL \wedge$
$free = mstate^{-1}[\{FALSE\}]$
INITIALISATION
$mstate := mem \times \{FALSE\}$
OPERATIONS
$rr \leftarrow alloc =$
IF $mstate[\{FALSE\}] \neq \emptyset$ **THEN**
ANY *vv* **WHERE**
$vv : mstate^{-1}[\{FALSE\}]$
THEN
$mstate(vv) := TRUE || rr := vv$
END
ELSE $rr := null$
END ;
END

Raffinements pas à pas

Lemma

La relation de raffinement est transitive, c'est-à-dire :

$$S \sqsubseteq_{v_1} T \ \wedge \ T \sqsubseteq_{v_2} Y \Rightarrow S \sqsubseteq_{v_2;v_1} U$$

Conséquence :

- si la spécification R_2 raffine R_1 via la relation $\{(x_2, x_1) \mid J_1\}$
- et la spécification R_3 raffine R_2 via la relation $\{(x_3, x_2) \mid J_2\}$

alors on peut montrer que R_3 raffine R_1 pour la relation $\{(x_3, x_1) \mid \exists x_2 \cdot (J_1 \wedge J_2)\}$

Implémentation

Dernier maillon d'une chaîne de raffinement d'une machine, une implémentation est un cas particulier de raffinement car les conditions suivantes sont satisfaites :

- une clause spéciale **VALUES** doit fixer les valeurs des ensembles (abstraits) et des constantes tel que l'invariant raffiné est satisfait :
  VALUES
  $ADDRESSES = 0..200000 \,;\; mem = 1000..20000 \,;\; null = 0$
- les variables doivent être typées par des ensembles concrets :
  - des entiers représentable (**INT**)
  - des booléens (**BOOL**)
  - des types énumérés
  - des tableaux (fonction totale) indexé par un (produit d') ensemble concret simple (non tableau) types avec des élements dans un ensemble concret simple.
- les substitutions doivent être déterministes, c'est-à-dire des instructions : affectation, appel d'opération, séquencement, bloc, déclaration de variables, **IF**, **CASE** et **WHILE**
- les prédicats utilisés dans les instructions doivent être évaluable opérationnellement (sans choix non-déterministe)

Impléméntation : exemple

Ex. 1 : Allocation mémoire.

IMPLEMENTATION
MEMORY_I
REFINES
MEMORY_r1
VALUES
$ADDRESSES = 0..200000\,;\ mem = 1000..20000\,;\ null = 0$
CONCRETE_VARIABLES
mstate
INITIALISATION
$mstate := mem \times \{FALSE\}$
OPERATIONS
$rr \leftarrow alloc =$
VAR ind, val **IN**
$ind := 1000; val := mstate(ind);$
WHILE $ind <= 20000 \wedge val = TRUE$ **DO**
$ind := ind + 1; val := mstate(ind)$
INVARIANT
$ind \in 1000..20000 \wedge val = mstate(ind) \wedge mstate[1..ind - 1] \subseteq \{TRUE\}$
VARIANT $20000 - ind$
END ;
IF $ind <= 20000$ **THEN** $rr := vv\,;\ mstate(vv) := TRUE$
ELSE $rr :=$ *null* **END**
END ;

Modularité

Primitives de structurations de modules :

- **IMPORTS** $M_1, \ldots, M_n$: que dans une implémentation, permet d'utiliser les services des machines ou des instanciations de machines importés ; pas d'importation multiple.
- **SEES** $M_1, \ldots, M_n$: dans tout composant, mais sans instaciation, permet d'utiliser en lecture les informations d'une machine ; pas de dépendences circulaires.
- **INCLUDES** $M_1, \ldots, M_n$: dans machine ou raffinement, permet inclusion des définitions d'un composant ou de son instaciation ; pas d'inclusion multiple.

Des obligations de preuves peuvent être générées pour assurer la cohérence de la composition.

Pour rendre visibles les opérations d'une machine importée ou inclue, utiliser :

- la clause **PROMOTES** $op_1, \cdots, op_n$ pour sélctionner les opérations
- la clause **EXTENDS** M_i pour inclure puis promouvoir toutes les opérations de M_i

B événementiel

Il s'agit une machine spéciale, appéllée **SYSTEM**, utilisée pour spécifier des automates :

- les opérations sont remplacées par des événements (= changement atomique de l'état)
- un événement a un nom mais pas de paramètres ou résultat
- les substitutions utilisées dans les événements ont une forme spéciale :
  - **BEGIN** S **END**
  - **SELECT** $G(x)$ **THEN** S **END**
  - **ANY** v **WHERE** $G(t, x)$ **THEN** S **END**

  (avec x les variables d'état).