# Feuille d'exercices n°2

Axiomatisation de l'Arithmétique

Les *axiomes de Peano* pour les entiers sont les trois axiomes suivants :

**successeur non nul** $\forall x \in \mathbb{N}\ s(x) \neq 0$ ;

**injectivité de la fonction successeur** $\forall x, y \in \mathbb{N}\ (s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$ ;

**récurrence** Pour toute propriété $P$ « bien définie » sur les entiers :

$$\left[P[0] \wedge \forall y \in \mathbb{N} \big(P[y] \Rightarrow P[s(y)]\big)\right] \Rightarrow \forall x \in \mathbb{N}\ P[x] .$$

**Exercice 1.** Montrer que les trois axiomes de Peano sont indépendants : pour cela il faut construire pour chacun des axiomes un *contre-modèle*, c'est-à-dire un ensemble $\mathcal{N}$ contenant un élément distingué, appelé 0, et sur lequel on définit une fonction $s : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, de façon que pour $(\mathcal{N}, 0, s)$, l'axiome dont on veut montrer qu'il est indépendant n'est pas vérifié, mais les deux autres le sont.

**Exercice 2.** Démontrez que chacun des deux axiomes, le successeur d'un entier est non nul, et l'injectivité du successeur, sont bien nécessaires pour montrer l'existence de la fonction définie par récurrence (*Indication : utilisez les contre-modèles de l'exercice 1*).

**Exercice 3 (définition par récurrence avec substitution de paramètre).** Soit $A$ un ensemble, $E$ un ensemble non vide, trois fonctions $g : A \to E$, $h : (E \times A) \to E$, et $\sigma : A \to A$. Montrer qu'alors il existe une unique fonction $f : (\mathbb{N} \times A) \to E$ vérifiant :

$$f(0, y) = g(y) \ ; \quad f(s(x), y) = h(f(x, \sigma(y)), y)$$

(*Indication : reprendre la démonstration de la récurrence avec paramètre*)
Les définitions par récurrence avec substitution de paramètre sont utiles par exemple quand on définit une fonction par récurrence sur la longueur d'une suite finie, ou la hauteur d'un arbre fini : la suite ou l'arbre est alors le paramètre.

**Exercice 4.** Démontrer ces propriétés par récurrence (dans l'ordre indiqué).

- $x + (y + z) = (x + y) + z$ ;
- $0 + x = x$ ;
- $s(x) + y = s(x + y)$ ;
- $x + y = y + x$ ;
- $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ ;
- $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ ;
- $0 \cdot x = 0$ ;
- $s(x) \cdot y = x \cdot y + y$ ;
- $x \cdot y = y \cdot x$ ;
- $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.

**Exercice 5.** Montrer les propriétés usuelles suivantes de la fonction puissance, pour tous entiers naturels $x$, $y$ et $z$ :

- $0^{x+1} = 0$ ;
- $1^x = 1$ ;
- $x^1 = x$ ;
- $(x \cdot y)^z = x^z \cdot y^z$ ;
- $x^{y+z} = x^y \cdot x^z$ ;
- $(x^y)^z = x^{y \cdot z}$.

**Exercice 6.** Montrer, à partir des axiomes de Peano ou des propriétés déjà démontrées, la régularité de l'addition, à savoir que pour tous entiers naturels $x$, $z$ et $z'$ :

$$z + x = z' + x \Rightarrow z = z' \ ; \quad x + z = x + z' \Rightarrow z = z' .$$

**Exercice 7.** Montrer, à partir des axiomes de Peano et des propriétés déjà démontrées, que pour tous entiers naturels $x$ et $y$ :

$$x + y = 0 \Rightarrow (x = 0 \text{ et } y = 0) \ ; \quad x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0 \text{ ou } y = 0) .$$