Tensorial logic in cobordism

Paul-André Melliès[*]

Abstract

The purpose is to formulate proofs of tensorial logic in the language of $(1 + 1)$-cobordism.

Forewords

A few weeks before writing this paper, I learned that my dear friend Kohei Honda passed away in London. This sudden accident was a tremendous shock, and I must confess that it still haunts me. Vivid memories come back in bubbles of the wonderful three years we spent together in Edinburgh. It all started in early1996. Samson Abramsky had just moved from Imperial College in London to the Laboratory for the Foundations of Computer Science in Edinburgh — taking there the position of Robin Milner who had just left Scotland to join the University of Cambridge. Samson wanted to create a new group there and he was looking for two Research Assistants. He decided to hire Kohei and me. This was really a bold choice Samson made on that occasion because Kohei and I were coming from territories quite alien to semantics. Kohei was already recognized with his wife Nobuko Yoshida for their discovery of the asynchronous π-calculus. I must say that Kohei was quite fanatic about the π-calculus, and he would openly declare that game semantics was only a small fragment of π. I was just as stubborn myself about rewriting theory: following the French tradition of Henri Cartan, Pierre-Louis Curien had strongly advised me to join Samson's group since I wanted to learn semantics — but I was so much hooked on rewriting theory when I arrived at the LFCS that it took me two long years before really working on linear logic and game semantics.

During the three years we spent together in Edinburgh, Kohei and I very soon became this pair of slightly eccentric French and Japanese researchers sharing an office on the ground floor of the JCMB building. The office was dark and cold, with

[*]CNRS, Laboratoire PPS, UMR 7126, Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, F-75205 Paris, France. This work has been partly supported by the ANR Project RECRE.

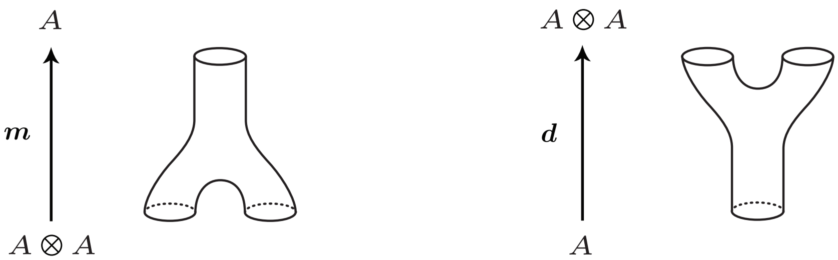
two narrow window panes facing a few bushes and an anonymous alley... but I spent there among the most luminous hours of my life — and I am sure that Kohei was just as happy developing his own stream of ideas.

I should say that Samson was an exquisite leader during all these years and that nothing of the effervescence of the *interaction group* — this is the way we decided to call ourselves — would have been possible without his open-minded attitude towards semantics combined with a frenetic curiosity for the surrounding fields. Any topic could be freely discussed in the group and there was absolutely no feeling of intellectual property among us. As a matter of fact, many ideas which I have developed in Paris in the past fifteen years were already germinating there. I distinctively remember Kohei explaining how call-by-value programs should be interpreted by letting Player start the game rather than Opponent. I remember Juliusz Chroboczek explaining how to interpret the *call-cc* operator of PCF by relaxing the well-bracketing condition of arena games. I remember Martin Wehr developping a narcotic interest in n-dimensional algebra and trying to convince all of us that n-categories would very soon become the foundation of logic and of programming languages. These are only examples and I could carry on in this way for several pages: so many ideas were floating around in this little group of dedicated people gravitating around Samson.

This short period of my life in Edinburgh defines a lot about who I am today, and I am happy to dedicate the present work to Samson as a testimony of friendship and gratitude. My primary purpose here is to entertain him with a recent and somewhat unexpected connection between two of his favorite topics of interest: game semantics and categorical quantum physics.

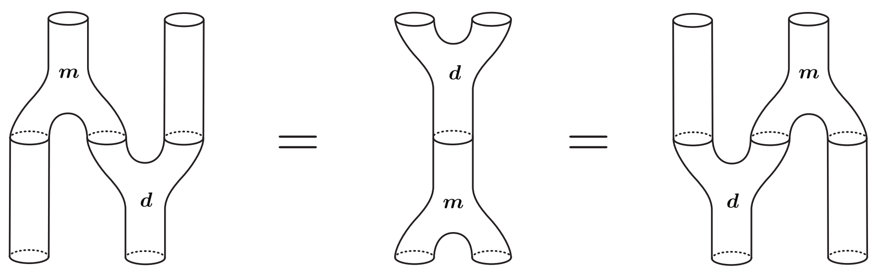
1 A brief introduction to (1+1)-cobordism

D'un point de vue algébrique, le cobordisme de dimension 1+1 correspond à la notion d'algèbre de Frobenius, typiquement définie dans la catégorie monoïdale $(\mathscr{V}, \otimes, k)$ des k-modules sur un anneau commutatif k. A noter que dans ce cas, l'unité I de la catégorie monoïdale est donnée par l'anneau commutatif k lui-même. Une algèbre de Frobenius A est un objet de la catégorie monoïdale $\mathscr{V}$ munis d'une opération m et d'une co-opération d



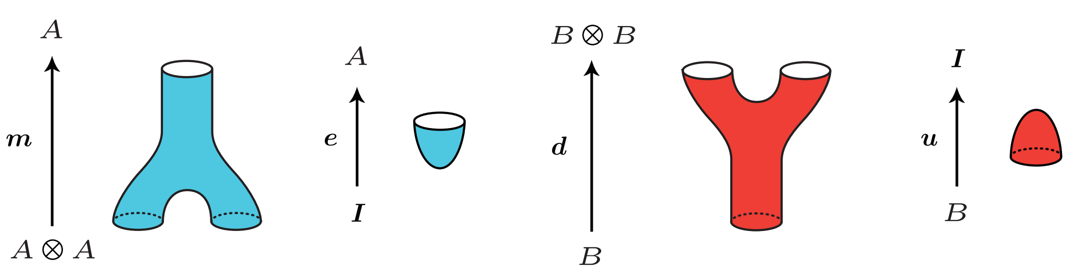
toutes deux associatives, et munies d'une unité e et d'une co-unité u

Une telle algèbre et cogèbre A est appelée *algèbre de Frobenius* lorsque l'égalité fondamentale suivante est satisfaite: est la suivante:



2 Frobenius pairs

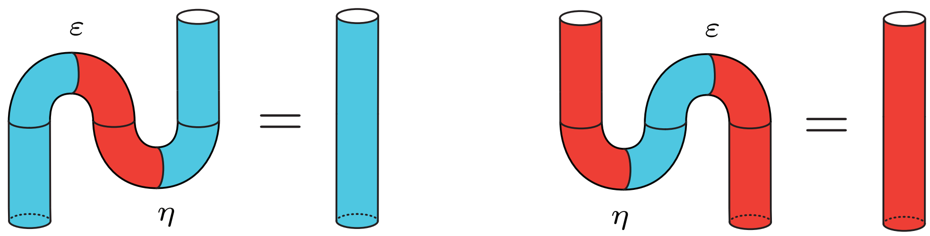
On peut vouloir reprendre la définition d'algèbre de Frobenius, et considérer l'objet A comme un objet à la personnalité clivée, dont il s'agira de décorréler avec attention la partie algébrique (A, m, e) de la partie coalgébrique (A, d, u). On obtient alors la définition suivante. On suppose tout d'abord données une algèbre (A, m, e) et une cogèbre (B, d, u) qui décrit une facette de la « personnalité » de l'algèbre de Frobenius — et dont les opérations sont dessinées comme suit



On demande ensuite que les deux espaces A et B forment une *paire duale*, c'est-à-dire qu'ils soient équippés d'une paire de morphismes

$$\eta \;:\; I \longrightarrow B \otimes A \qquad\qquad \varepsilon \;:\; A \otimes B \longrightarrow I$$

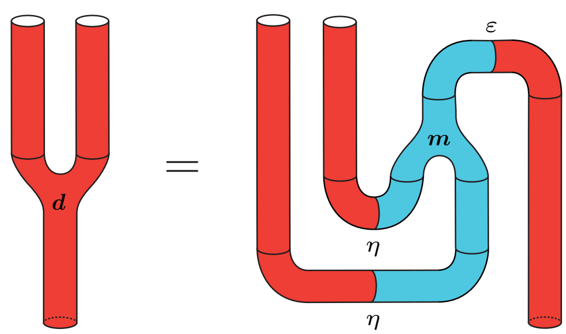
qui satisfassent les égalités suivantes:



Une manière équivalente de formuler cette condition dans le cas des k-espaces vectoriels est de demander qu'il existe une forme $\varepsilon : A \otimes B \to k$ non dégénérée. Il est important de demander de surcroît que (A, m, e) et (B, d, u) ainsi que les deux morphismes η and ε définissent une *paire duale « algèbre-cogèbre »*

$$(A, m, e) \quad \dashv \quad (B, d, u)$$

ce qui signifie que la structure de cogèbre sur B déduite de la structure d'algèbre sur A coïncide avec la structure initiale:



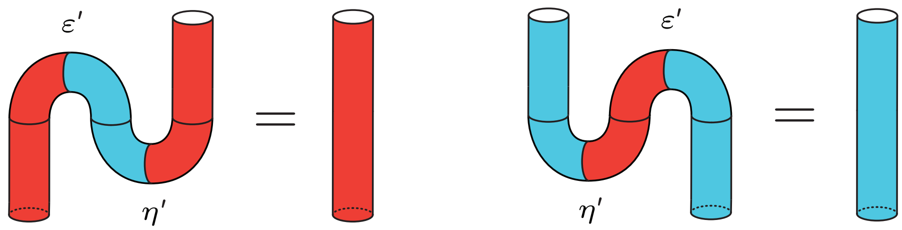
De manière symétrique, on demande que (B, d, u) et (A, m, e) forment une *paire duale « cogèbre-algèbre »*

$$(B, d, u) \quad \dashv \quad (A, m, e)$$

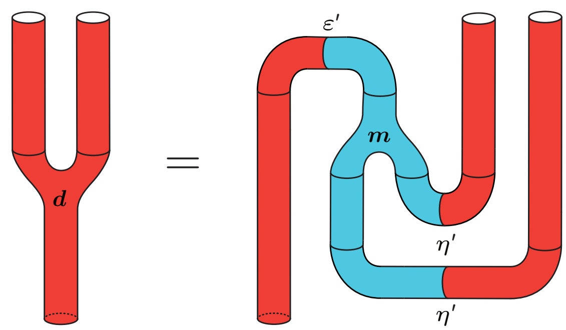
c'est-à-dire qu'elle soient équippées d'une dualité $B \dashv A$ définie par des morphismes

$$\eta' \;:\; I \longrightarrow B \otimes A \qquad\qquad \varepsilon' \;:\; A \otimes B \longrightarrow I$$

qui satisfont donc les deux égalités suivantes:



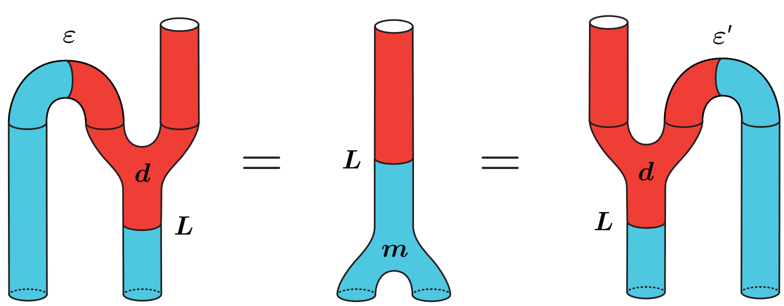
ainsi que l'égalité suivante qui établit que la structure de cogèbre sur B déduite de la structure d'algèbre (A, m, e) au moyen de la dualité $B \dashv A$ coïncide avec la structure de cogèbre (B, d, u) donnée initialement à B:



Une *paire de Frobenius* est alors la donnée d'une algèbre (A, m, e) et d'une cogèbre (B, d, u) définissant de telles paires duales « algèbre-cogèbre » et « cogèbre-algèbre » munie de plus d'un isomorphisme

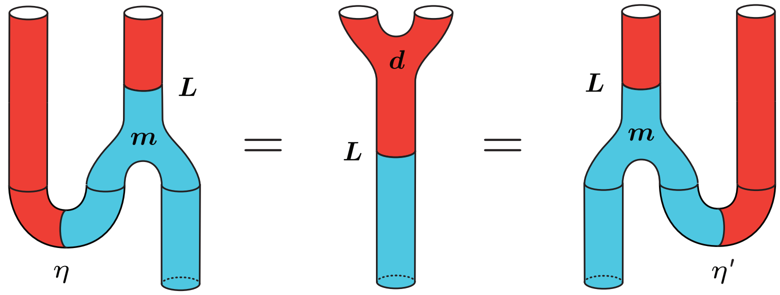
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "L"] \arrow[r, phantom, "\text{isomorphisme}"] & B \arrow[l, bend left, "R"] \end{tikzcd}$$

entre les espaces A et B sous-jacents. On demande de surcroît que les égalités suivantes soient satisfaites:



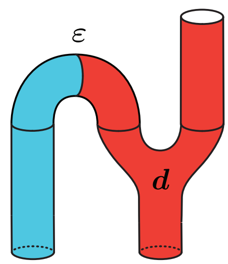
(1)

A noter que les équations (1) sont équivalentes aux équations suivantes:



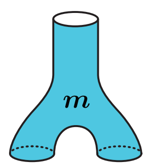
Ces équations peuvent être comprises de la manière suivante. La dualité « algèbre-cogèbre» $(A, m, e) \dashv (B, d, u)$ induit une action à gauche de l'algèbre (A, m, e) sur l'espace B, définie de la manière suivante:

$$A \otimes B \xrightarrow{\boldsymbol{d}} A \otimes B \otimes B \xrightarrow{\varepsilon} B \tag{2}$$



Nous disposons de surcroît de l'action à gauche de l'algèbre A sur elle-même, définie de la manière attendue:

$$A \otimes A \xrightarrow{\boldsymbol{m}} A$$

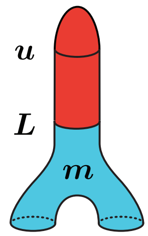


La première équation (1) revient donc à demander que le morphisme L transporte l'action de l'algèbre A sur elle-même en son action (2) sur l'espace B. De manière symétrique, la dualité $B \dashv A$ induit une action à droite de l'algèbre A sur B, et la second équation (1) revient à demander que le morphisme L transporte l'action canonique à droite de l'algèbre A sur elle-même en cette action à droite de A sur B.

3 The Frobenius bracket

Le morphisme suivant:

$$\begin{tikzcd} I \\ B \arrow[u, "u"'] \\ A \arrow[u, "L"'] \\ A \otimes A \arrow[u, "m"'] \end{tikzcd}$$



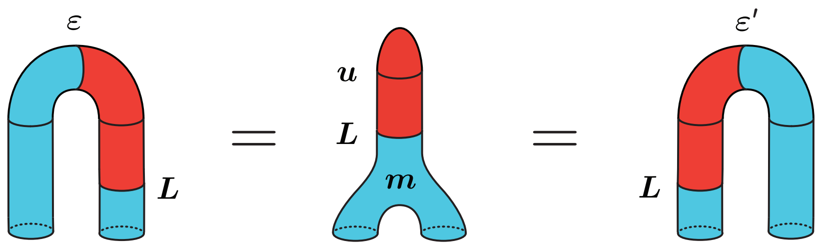
définit une forme bilinéaire sur A que l'on appelle *crochet de Frobenius* et que l'on note

$$\{\!\{ -,- \}\!\} \quad : \quad A \otimes A \quad \longrightarrow \quad I$$

A noter que la définition du crochet de Frobenius ainsi que l'associativité du produit $a_1 \bullet a_2 = m(a_1, a_2)$ assure que l'égalité suivante est satisfaite:

$$\{\!\{ a_1 \bullet a_2, a_3 \}\!\} \quad = \quad \{\!\{ a_1, a_2 \bullet a_3 \}\!\} \tag{3}$$

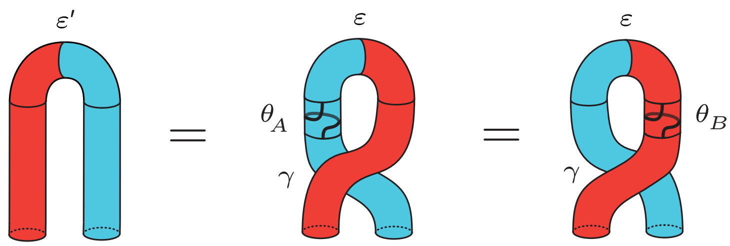
De plus, la définition de paire de Frobenius a pour conséquence que le crochet de Frobenius peut aussi être formulé des manières suivantes:



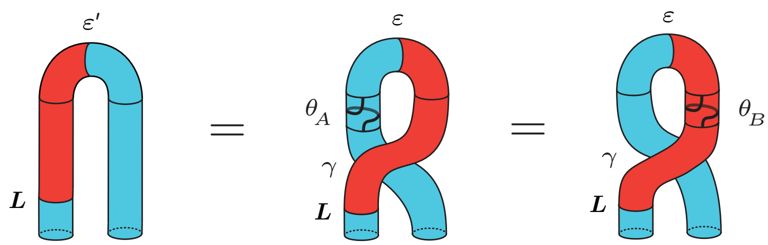
4 Pivotal Frobenius pairs

We may suppose that we work in a balanced monoidal category $\mathscr{V}$, typically given by the category of representations of a quantum group H. The twist θ is represented as a rotation of angle 2π on the border, typically of the objects A and B:

A Frobenius pair in a balanced monoidal category is called *pivotal* when the equality below is satisfied:

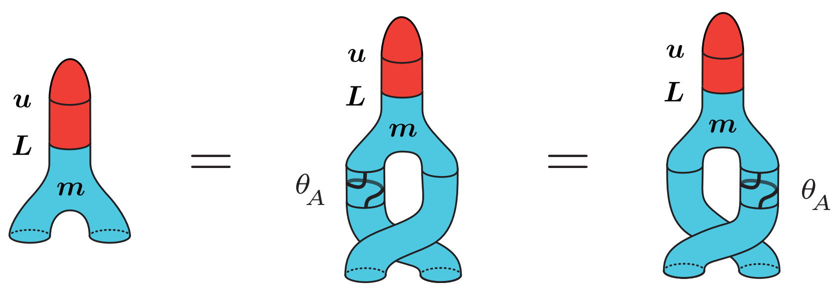


Since the morphism L has the morphism R as inverse, one may replace this condition by the equivalent condition:

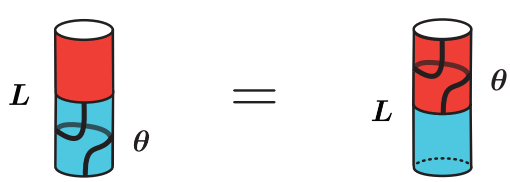


(4)

We will see that this formulation of pivotality is more natural than the previous one when we move to the 2-categorical case. It should be noted that this condition is equivalent to asking that the Frobenius bracket is commutative in the sense that the equality below is satisfied:



This comes from the fact that the twist is a natural isomorphism from the identity functor into itself, and thus satisfies the equality:



A balanced monoidal category is symmetric precisely when the twist θ is equal to the identity *id*. In that case, the pivotal property may be also written as the following commutativity property:

$$\{\!\!\{ a_1, a_2 \}\!\!\} \quad = \quad \{\!\!\{ a_2, a_1 \}\!\!\}.$$

Together with the associativity property (3) this commutativity property implies the following cyclicity property:

$$\{\!\!\{ a_1 \bullet a_2, a_3 \}\!\!\} \quad = \quad \{\!\!\{ a_3 \bullet a_1, a_2 \}\!\!\} \quad = \quad \{\!\!\{ a_2 \bullet a_3, a_1 \}\!\!\}$$

5 The hermitian dagger structure

Suppose that in the balanced monoidal category $\mathscr{V}$, every object A is equipped with a right dual noted $A^\dagger$. This duality induces a monoidal functor

$$\dagger \quad : \quad \mathscr{V} \quad \longrightarrow \quad \mathscr{V}^{\,op(0,1)}.$$

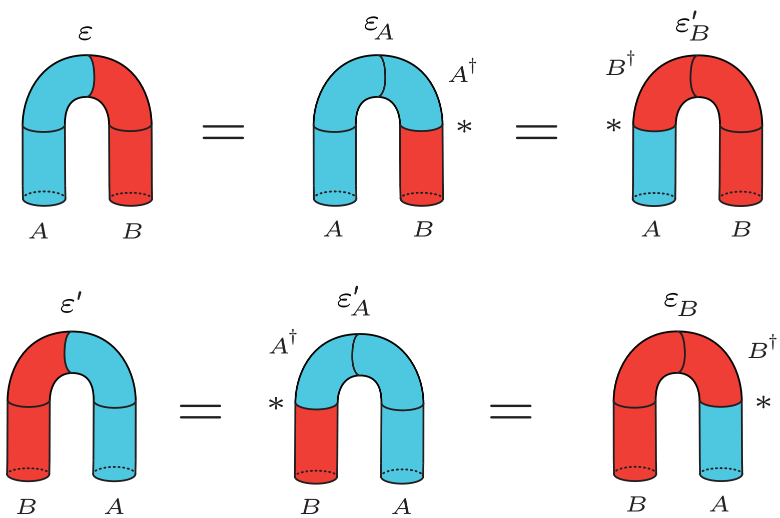
From this follows that the comonoid structure of the object B is transported by the functor $\dagger$ to a monoid structure on the object $B^\dagger$. By construction, this monoid structure defines a dual pair of algebra-coalgebra

$$(B^\dagger, d^\dagger, u^\dagger) \quad \dashv \quad (B, d, u).$$

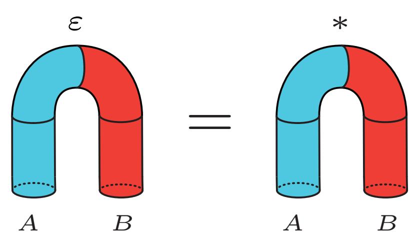
The data of the dual pair of algebra-coalgebra $(A, m, e) \dashv (B, d, u)$ is then equivalent to the data of an isomorphism of monoid

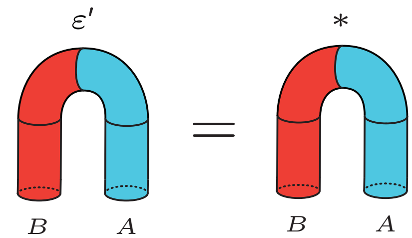
$$\begin{tikzcd}
(A, m, e) \arrow[rr, bend left, "(-)^*"] \arrow[rr, phantom, "\substack{\textit{isomorphism}\\ \textit{of monoid}}"] & & (B^\dagger, d^\dagger, u^\dagger) \arrow[ll, bend left, "{}^*(-)"]
\end{tikzcd}$$

One obtains the following equalities:



which will play very soon a fundamental role in the connection between cobordism and logic. These equalities are so important that we decide to remind the presence of the operation $*$ in the notation:





In a balanced monoidal category, the right dual $A^\dagger$ is also a left dual of A by the construction (4). The duality $A^\dagger \dashv A$ between A and $A^\dagger$ defines a morphism

$$[-,-] \quad : \quad A^\dagger \otimes A \quad \longrightarrow \quad I.$$

From this morphism, one deduces the evaluation bracket

$$\langle - | - \rangle \quad : \quad A^\dagger \otimes B \quad \longrightarrow \quad I$$

defined as the composite:

$$A^\dagger \otimes B \xrightarrow{A^\dagger \otimes R} A^\dagger \otimes A \xrightarrow{[-,-]} I$$

or equivalently as the composite:

$$A^\dagger \otimes B \xrightarrow{R^\dagger \otimes B} B^\dagger \otimes B \xrightarrow{[-,-]} I$$

It appears that the associativity property defining a Frobenius pair is equivalent to the associativity law:

$$\langle m \bullet a | b \rangle \quad = \quad \langle a | m^* \circ b \rangle$$

A dagger is a balanced monoidal functor

$$\dagger \quad : \quad \mathscr{V} \quad \longrightarrow \quad \mathscr{V}^{op(1)}$$

where $\mathscr{V}^{op(1)}$ is equipped with the "inverse" balanced structure defined by γ^{-1} and θ^{-1}.

6 Frobenius chiralities

A Frobenius chirality in a balanced monoidal dagger category $\mathscr{V}$ is defined as a pair of objects A and B equipped with an isomorphism

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "L"] \arrow[r, phantom, "\text{isomorphisme}"] & B \arrow[l, bend left, "R"] \end{tikzcd}$$

with a pair of monoid structures

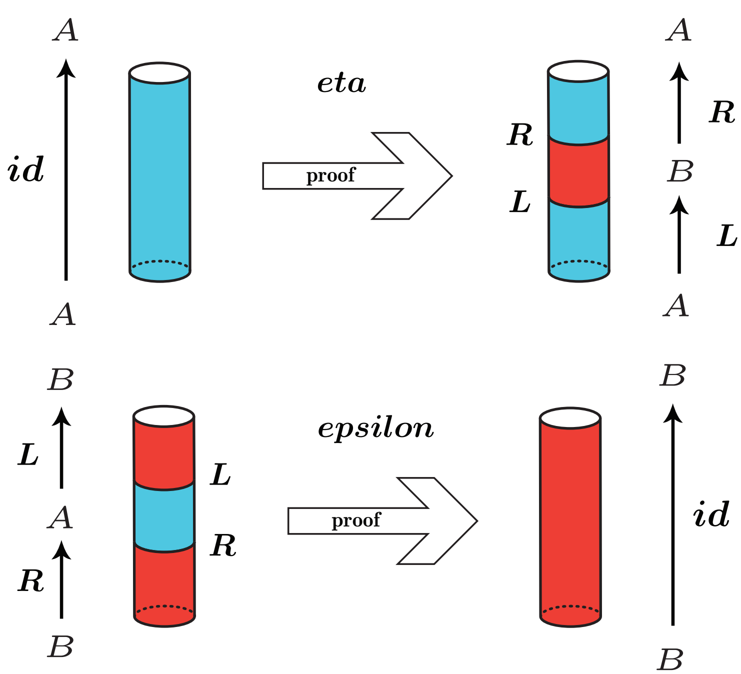
$$(A, m, e) \quad (B^{\dagger}, n, i)$$

together with a monoid isomorphism

$$\begin{tikzcd} (A, m, e) \arrow[r, bend left, "(-)^{*}"] \arrow[r, phantom, "\substack{\text{algebra}\\ \text{isomorphism}}"] & (B^{\dagger}, n, i) \arrow[l, bend left, "{}^{*}(-)"] \end{tikzcd}$$

such that ...

7 Dialogue categories and chiralities



La formulation bicolore de la notion d'algèbre de Frobenius en terme de *paire* de Frobenius nous rapproche secrètement de la structure de contrôle fondamentale des langages de programmation — donnée par la notion de continuation. Du point de vue catégorique, cette notion de continuation correspond à la notion de catégorie de dialogue. Si on « catégorifie » la notion de paire de Frobenius, on obtient une paire de catégories monoidales $(\mathscr{A}, \owedge, true)$ et $(\mathscr{B}, \ovee, false)$ munies d'une équivalence monoidale

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
(\mathscr{A}, \owedge, true) \arrow[r, bend left, "{}^{*}(-)"] \arrow[r, phantom, "\substack{\textit{quivalence} \\ \textit{monodale}}"] & (\mathscr{B}, \ovee, false)^{op(0,1)} \arrow[l, bend left, "(-)^{*}"]
\end{tikzcd}$$

ainsi que d'une équivalence

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\mathscr{A} \arrow[r, bend left, "L"] \arrow[r, phantom, "\substack{\textit{quivalence} \\ \textit{de catgories}}"] & \mathscr{B} \arrow[l, bend left, "R"]
\end{tikzcd}$$

entre les catégories $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sous-jacentes. Dans ce cadre, le crochet de dualité $[-,-]$ est défini par l'ensemble

$$\begin{array}{cccccc}
[-,-] & : & \mathscr{B}^{op} \times \mathscr{B} & \longrightarrow & Ens \\
& & (B_1, B_2) & \mapsto & \mathscr{B}(B_1, B_2)
\end{array}$$

et le crochet d'évaluation $\langle - | - \rangle$ défini par l'ensemble

$$\langle A | B \rangle \quad = \quad \mathscr{B}(LA, B).$$

On peut alors utiliser l'équivalence entre A et B pour déduire que $\langle A | B \rangle$ est en bijection avec l'ensemble des morphismes $\mathscr{A}(A, RB)$. L'égalité fondamentale des paires de Frobenius se réécrit alors

$$\mathscr{A}(N \otimes A, RB) \quad \cong \quad \mathscr{A}(A, R(B \otimes N))$$

De cela, on déduit que nous sommes en train de formuler la notion de catégorie de dialogue $\mathscr{C}$ d'une manière « bicolore » en une paire de catégories monoïdales

$$(\mathscr{A}, \owedge, true) \cong (\mathscr{C}, \otimes, I) \qquad\qquad (\mathscr{B}, \ovee, false) \cong (\mathscr{C}, \otimes, I)^{op(0,1)}$$

où $\cong$ dénote une équivalence monoïdale entre catégories monoïdales.

8 Frobenius chiralities and 2-categorical cobordism

Adjonctions. On suppose que l'algèbre de Frobenius soit 2-unitaire. Autrement dit, on rajoute une structure d'algèbre sur $A^\dagger$ et donc sur B par isomorphisme. Ils vérifient les lois suivantes: ... A noter qu'on retrouve la notion d'algèbre de Frobenius unitaire lorsqu'on fait l'hypothèse que les adjoints sont des inverses.

Cette montée en science de l'informatique passera certainement par un rapprochement avec la physique. Il y a des raisons technologiques à cela. L'ordinateur est une construction physique pour simuler du calcul symbolique. Les langages La compilation

$$\begin{array}{ccccc} \text{langage} & & \text{langages} & & \text{langage} \\ \text{de haut niveau} & \rightsquigarrow & \text{intermédiaires} & \rightsquigarrow & \text{de bas niveau} \end{array}$$

Qu'est-ce que les invariants? Retour à la physique: mémoires faibles, concurrence.

Raisonner sur les programmes. Typage. Logique Egalité entre programmes Domaines Logique linéaire Cobordisme

En effet, l'informatique en général et les langages de programmation en particulier sont trop souvent perçus comme un matériau indigne et intrinsèquement ennuyeux du point de vue mathématique.

Nous verrons cependant que ce projet est justifié par un faisceau de découvertes

Cette partie de l'informatique offre un champ d'étude d'une grande richesse, et mérite qu'on l'établisse

Nous verrons que ce projet de « géométrisation » est loin d'être immédiat. En effet, l'idée que les langages de programmation puissent être organisés selon des principes « géométriques » peut sembler surprenante

a pour ambition d'établir cette partie de l'informatique dans une langue proprement mathématique.

peut passer pour extravagant Autant ce projet découle naturellement des avancées du domaine, autant il peut passer pour extravagant à première vue. En effet, l'idée que les langages de programmation puissent être organisés selon des principes « géométriques » peut sembler surprenante, et mérite donc d'être discutée.

Pour mener à bien ce projet, j'ai procédé par étape, trouvé utile de me fondre dans un champ théorique particulier et déjà bien constitué du domaine, successivement:

- théorie de la réécriture,
- sémantique des jeux,
- logique linéaire,
- théorie des effets de bord.

puis une fois introduit de le reprendre et d'en reformuler de manière plus « géométrique » les concepts cardinaux.

Mon projet est de raconter ici les étapes de ce périple.

La difficulté

Cette tentative de « géométrisation » complète à mes yeux le tournant logique opéré dans les années 1960 auprès Strachey.

qui complète les principes « grammaticaux » auxquels on les réduit trop souvent.

, qui complète harmonieusement leur présentation « grammaticale ».

L'existence d'une telle « géométrie » est loin d'être

Cette géométrie souhaitée s'appuie sur des principes algébriques

J'entends géométrie au sens large, par analogie naïve à ce qu'on appelle géométrisation de la physique.

Je me suis intéressé tout d'abord aux systèmes de réécriture à la sémantique des jeux, puis aujourd'hui aux effets de bord.

Par géométrie, j'entends des concepts simples qui s'articulent de manière naturelle aux mathématiques. La quête d'une telle « géométrie » est loin plutôt que « grammaticale » L'existence d'une telle géométrie des langages de programmation est loin d'être évidente.