Le système de Gentzen pour le calcul des prédicats

Le système $\mathcal{G}$ pour le calcul des prédicats

Axiome : $\Delta, A \vdash \Gamma, A$ (A es tune formule du calcul des prédicats)

Règles d'inférence logiques :

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A}{\Delta, \neg A \vdash \Gamma}\ (\neg\ g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg A}\ (\neg\ d)$$

$$\frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \to B \vdash \Gamma}\ (\to\ g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \to B, \Gamma}\ (\to\ d)$$

$$\frac{\Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \wedge B \vdash \Gamma}\ (\wedge\ g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma}\ (\wedge\ d)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \vee B \vdash \Gamma}\ (\vee g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, B, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma}\ (\vee d)$$

$$\frac{\Gamma, \{x/t\}A, \forall x.A \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x.A \vdash \Delta}\ (\forall\ g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x.A, \Delta}\ (\forall\ d)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x.A \vdash \Delta}\ (\exists\ g) \qquad \frac{\Gamma \vdash \{x/t\}A, \exists x.A, \Delta}{\Gamma \vdash \exists x.A, \Delta}\ (\exists\ d)$$

Dans les règles $(\forall\ d)$ et $(\exists\ g)$ x n'est pas libre dans Γ, Δ.

Dans les règles $(\forall\ g)$ et $(\exists\ d)$ l'opération $\{x/t\}A$ ne capture pas des variables.

Dérivation dans $\mathcal{G}$

On note $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$ si le séquent $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système $\mathcal{G}$.

Premier exemple de dérivation dans $\mathcal{G}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p(x) \vdash p(x), \exists y \neg p(y)}{\vdash p(x), \neg p(x), \exists y \neg p(y)}}{\vdash p(x), \exists y \neg p(y)}}{\vdash \forall x.p(x), \exists y \neg p(y)}}{\vdash (\forall x.p(x)) \vee (\exists y \neg p(y))}$$

Deuxième exemple de dérivation dans $\mathcal{G}$

$$\dfrac{\dfrac{p(a) \vdash p(a), \exists x.p(x)}{p(a) \vdash \exists x.p(x)} \quad \dfrac{p(b) \vdash p(b), \exists x.p(x)}{p(b) \vdash \exists x.p(x)}}{p(a) \vee p(b) \vdash \exists x.p(x)}$$

Troisième exemple de dérivation dans $\mathcal{G}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash p, \exists z.q(z) \quad \dfrac{p, q(x) \vdash q(x), \exists z.q(z)}{p, q(x) \vdash \exists z.q(z)}}{p \to q(x), p \vdash \exists z.q(z)}}{p \to q(x) \vdash p \to \exists z.q(z)}}{\exists x.(p \to q(x)) \vdash p \to \exists z.q(z)}}{\vdash \exists x.(p \to q(x)) \to (p \to \exists z.q(z))}$$

Quatrième exemple de dérivation dans $\mathcal{G}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p(a), p(f(a)) \vdash p(f(a)), p(f(f(a))), \exists x.(p(x) \to p(f(x))}{p(a) \vdash p(f(a)), p(f(a)) \to p(f(f(a))), \exists x.(p(x) \to p(f(x))}}{p(a) \vdash p(f(a)), \exists x.(p(x) \to p(f(x))}}{\vdash p(a) \to p(f(a)), \exists x.(p(x) \to p(f(x)))}}{\vdash \exists x.(p(x) \to p(f(x)))}$$

Cinquième exemple de dérivation dans $\mathcal{G}$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p(x), p(y) \vdash p(y), p(y'), \exists x.\forall y.(p(x) \to p(y))}{p(x) \vdash p(y), p(y) \to p(y'), \exists x.\forall y.(p(x) \to p(y))}}{p(x) \vdash p(y), \forall y'.(p(y) \to p(y')), \exists x.\forall y.(p(x) \to p(y))}}{p(x) \vdash p(y), \exists x.\forall y.(p(x) \to p(y))}}{\vdash p(x) \to p(y), \exists x.\forall y.(p(x) \to p(y))}}{\vdash \forall y.(p(x) \to p(y)), \exists x.\forall y.(p(x) \to p(y))}}{\vdash \exists x.\forall y.(p(x) \to p(y))}
$$

Sixième exemple de dérivation dans $\mathcal{G}$

Soit $A = \exists x\ \neg(\neg p(x) \wedge \neg Q(x))$, $B = \forall x\ p(x)$ et $C = \forall x\ Q(x)$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p(y), B, \neg q(y) \vdash p(y), A}{p(y), B, \neg p(y), \neg q(y) \vdash A}}{\forall x\ p(x), \neg p(y), \neg q(y) \vdash A} \quad \dfrac{\dfrac{q(y), C, \neg p(y) \vdash q(y), A}{q(y), C, \neg p(y), \neg q(y) \vdash A}}{\forall x\ q(x), \neg p(y), \neg q(y) \vdash A}}{\forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x), \neg p(y), \neg q(y) \vdash A}}{\forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x), \neg p(y) \wedge \neg q(y) \vdash A}}{\forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x) \vdash \neg(\neg p(y) \wedge \neg q(y)), A}}{\forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x) \vdash \exists x\ \neg(\neg p(x) \wedge \neg q(x))}
$$

Remarques

- Retarder au maximum le choix des témoins (règles $\forall\ g$ et $\exists\ d$).
- Renommer des variables (si nécessaire) pour éviter la capture de variables.

Comment transformer quelques dérivations dans $\mathcal{G}$

Théorème : (Affaiblissement) Si $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système $\mathcal{G}$, alors $\Delta, A \vdash \Gamma$ et $\Delta \vdash A, \Gamma$ le sont aussi.

Théorème : (Contraction) Si $\Delta, A, A \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système $\mathcal{G}$, alors $\Delta, A \vdash \Gamma$ l'est aussi. Si $\Delta \vdash \Gamma, A, A$ est dérivable dans le système $\mathcal{G}$, alors $\Delta \vdash \Gamma, A$ l'est aussi.

Rappel

Définition : Un séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$ est valide ssi sa formule associée $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to (B_1 \vee \ldots \vee B_m)$ est valide.

Propriétés du système $\mathcal{G}$ pour le calcul des prédicats

Théorème : Le système $\mathcal{G}$ est correct, i.e., si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors $\Delta \vdash \Gamma$ est valide.

Théorème : Le système $\mathcal{G}$ est complet, i.e., si $\Delta \vdash \Gamma$ est valide, alors $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$.