LOGIQUE II
Examen final – seconde session
Janvier 2007
— ∘ —
Aucun document n'est autorisé.
Rédigez sur une copie séparée.

Un lambda-calcul pour des fonctions récursives

On rajoute au lambda-calcul les symboles $\mathsf{0}$, S et rec. Dans ce langage, la constante $\mathsf{0}$ représente l'entier naturel 0 et, si le terme N représente l'entier n alors le terme $(\mathsf{S}\ N)$ représente l'entier $n+1$. Le symbole fonctionnel rec sert à définir des fonctions récursives par cas sur les entiers.

Q1 Donnez un terme qui représente l'entier 3.

On pose que $\mathsf{0}$ est une constante en forme normale. On donne pour rec les règles de réduction suivantes :

- $(\mathsf{rec}\ \mathsf{0}\ t_0\ t_s) \rightarrow_\beta t_0$
- $(\mathsf{rec}\ (\mathsf{S}\ t)\ t_0\ t_s) \rightarrow_\beta (t_s\ t\ (\mathsf{rec}\ t\ t_0\ t_s))$

Soit $A = \lambda n \lambda m(\mathsf{rec}\ n\ m\ \lambda n' \lambda r(\mathsf{S}\ r))$. Soit N et M deux termes que l'on suppose en forme normale. Donnez la forme normale de

Q2 $(A\ \mathsf{0}\ M)$
Q3 $(A\ N\ M)$
Q4 $(A\ (\mathsf{S}\ N)\ M)$

Deux termes t_1 et t_2 sont dits *beta-équivalents* (on note $t_1 =_\beta t_2$) s'il existe un terme n tel que $t_1 \rightarrow_\beta n$ et $t_2 \rightarrow_\beta n$.

Q5 Montrez que $(A\ (\mathsf{S}\ N)\ M) =_\beta (\mathsf{S}\ (A\ N\ M))$.
Q6 Quelle fonction arithmétique calcule le terme A ?
Q7 Donnez les équations de la définition primitive récursive de cette fonction (appelons la a)

$$\begin{array}{lcl} a(0,m) & = & \ldots \\ a(n+1,m) & = & \ldots \end{array}$$

On se donne la constante de type *nat* et les règles de typage suivantes :

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{0} : nat} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : nat}{\Gamma \vdash (\mathsf{S}\ t) : nat} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : nat \quad \Gamma \vdash t_0 : \tau \quad \Gamma \vdash t_s : nat \rightarrow \tau \rightarrow \tau}{\Gamma \vdash (\mathsf{rec}\ t\ t_0\ t_s) : \tau}$$

On rappelle les règles de typage de base du lambda-calcul

$$\frac{}{x : \tau, \Gamma \vdash x : \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : \tau_1 \rightarrow \tau_2 \quad \Gamma \vdash u : \tau_1}{\Gamma \vdash (t\ u) : \tau_2} \qquad \frac{\Gamma, x : \tau_1 \vdash t : \tau_2}{\Gamma \vdash \lambda x t : \tau_1 \rightarrow \tau_2}$$

Q8 Montrez que A est de type $nat \rightarrow nat \rightarrow nat$

Soit $P = \lambda n \lambda m(\mathsf{rec}\ n\ \mathsf{0}\ \lambda n' \lambda r(A\ m\ r))$, où A est le terme défini ci-dessus.

Q9 Quelle fonction arithmétique calcule le terme P ?
Q10 Quel est le type de P ?

Justifiez vos réponses.