MPRI 2–2 TD 1 du 16/1/2020

Thomas Ehrhard

1) (Utile pour la suite.) Soit $t \in \mathbf{Rel}(E, F)$.

1.1) Soient $(m_i, n_i) \in {!t}$ pour $i = 1, \dots, k$, montrer que $(m_1 + \cdots + m_k, n_1 + \cdots + n_k) \in {!t}$.

Solution $\triangleright$ On utilise la notation suivante: si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments d'un ensemble E et si $J \subseteq I$ est fini, alors $[a_i \mid i \in J]$ est l'élément m de $\mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(E)$ tel que $m(a)$ est le nombre d'éléments i de I tels que $a_i = a$.

Pour chaque $i = 1, \dots, k$ on peut trouver un ensemble d'indices fini J_i et deux familles $(a_j)_{j \in J_i}$ et $(b_j)_{j \in J_i}$ tels que $(a_j, b_j) \in t$ et $m_i = [a_j \mid j \in J_i]$ et $n_i = [b_j \mid j \in J_i]$. Quitte à réindexer, on peut aussi supposer les J_i deux à deux disjoints. En posant $J = \cup_{i=1}^{k} J_i$ on a $m_1 + \cdots + m_k = [a_j \mid j \in J]$ et $n_1 + \cdots + n_k = [b_j \mid j \in J]$ et donc $(m_1 + \cdots + m_k, n_1 + \cdots + n_k) \in {!t}$. $\triangleleft$

1.2) Soit $(m, n) \in {!t}$. Montrer que si $n_1, \dots, n_k \in {!F}$ sont tels que $n = n_1 + \cdots + n_k$ alors il existe $m_1, \dots, m_k \in {!E}$ tels que $m = m_1 + \cdots + m_k$ et (m_i, n_i) pour $i = 1, \dots, k$.

Et de même si $(m, n) \in {!t}$ et si $m_1, \dots, m_k \in {!E}$ sont tels que $m = m_1 + \cdots + m_k$ alors il existe $n_1, \dots, n_k \in {!F}$ tels que $n = n_1 + \cdots + n_k$ et (m_i, n_i) pour $i = 1, \dots, k$.

Solution $\triangleright$ Vu la symétrie de la définition de $!t$, les deux énoncés se prouvent de la même façon, on traite le second. On a $m = [a_1, \dots, a_l]$ et $n = [b_1, \dots, b_l]$ avec $(a_j, b_j) \in t$ pour $j = 1, \dots, l$ et on peut trouver des ensembles deux à deux disjoints $(J_i)_k^l$ tels que $\cup_{i=1}^{k} J_i = \{1, \dots, l\}$ et $m_i = [a_j \mid j \in J_i]$. On pose $n_i = [b_j \mid j \in J_i]$ pour $i = 1, \dots, k$ et ces n_i vérifient la propriété voulue. $\triangleleft$

2) Dans **Rel** prouver que le diagramme de naturalité de la déréliction commute:

$$\begin{tikzcd}
{!E} \arrow[r, "\mathsf{der}_E"] \arrow[d, "!t"'] & E \arrow[d, "t"] \\
{!F} \arrow[r, "\mathsf{der}_F"] & F
\end{tikzcd}$$

Soit $m = [a_1, \dots, a_k] \in {!E}$ et $b \in F$, observer que si $(m, b) \in \mathsf{der}_F \ {!t}$ alors il existe $n \in {!F}$ tel que $(m, n) \in {!t}$ et $(n, b) \in \mathsf{der}_F$. Cette dernière condition signifie que $n = [b]$. Mais alors la définition de $!t$ implique que $k = 1$ et que $(a_1, b) \in t$. Donc $(m, a_1) \in \mathsf{der}_E$ et par suite $(m, b) \in t \ \mathsf{der}_E$, on a prouvé que $\mathsf{der}_F \ {!t} \subseteq t \ \mathsf{der}_E$.

Réciproquement on suppose que $(m, b) \in t \ \mathsf{der}_E$. Soit $a \in E$ tel que $(m, a) \in \mathsf{der}_E$ et $(a, b) \in t$. Par définition de der_E on a $k = 1$ et $a_1 = a$. Soit $n = [b]$, on a $(m, n) \in {!t}$ et $(n, b) \in \mathsf{der}_F$ et donc $(m, b) \in \mathsf{der}_F \ {!t}$. On a prouvé que $t \ \mathsf{der}_E \subseteq \mathsf{der}_F \ {!t}$.

3) De même pour la naturalité du digging.

$$\begin{tikzcd}
{!E} \arrow[r, "\mathsf{dig}_E"] \arrow[d, "!t"'] & {!!E} \arrow[d, "!!t"] \\
{!F} \arrow[r, "\mathsf{dig}_F"] & {!!F}
\end{tikzcd}$$

Soit $m \in {!E}$ et $N \in {!!F}$.

Supposer d'abord que $(m, N) \in \mathsf{dig}_F \ {!t}$. Soit $n \in {!F}$ tel que $(m, n) \in {!t}$ et $(n, N) \in \mathsf{dig}_F$. On écrit $N = [n_1, \dots, n_k]$, alors on a $n = n_1 + \cdots + n_k$. Par l'exercice 1 on peut écrire $m = m_1 + \cdots + m_k$ avec $(m_i, n_i) \in {!t}$ pour $i = 1, \dots, k$. Soit $M = [m_1, \dots, m_k] \in {!!E}$, on a $(m, M) \in \mathsf{dig}_E$ et $(M, N) \in {!!t}$, ce qui prouve que $\mathsf{dig}_F \ {!t} \subseteq {!!t} \ \mathsf{dig}_E$.

Réciproquement on suppose $(m, N) \in {!!t} \ \mathsf{dig}_E$. Soit $M \in {!!E}$ tel que $(m, M) \in \mathsf{dig}_E$ et $(M, N) \in {!!t}$. On peut écrire $M = [m_1, \dots, m_k]$ et $N = [n_1, \dots, n_k]$ avec $(m_i, n_i) \in {!t}$ pour $i = 1, \dots, k$. De plus comme $(m, M) \in \mathsf{dig}_E$ on a $m_1 + \cdots + m_k = m$. Soit $n = n_1 + \cdots + n_k$, on a $(m, n) \in {!t}$ par l'exercice 1.

4) Prouver les deux commutations suivantes:

$$\begin{tikzcd}
!E & !!E \arrow[l, "\mathsf{der}_{!E}"'] \arrow[r, "!\mathsf{der}_E"] & !E \\
& !E \arrow[ul, "\mathsf{Id}"] \arrow[u, "\mathsf{dig}_E"'] \arrow[ur, "\mathsf{Id}"'] &
\end{tikzcd}$$

5) Si $N = [n_1, \ldots, n_k] \in !!F$, on pose $\Sigma(N) = n_1 + \cdots + n_k \in !F$. Prouver la commutation

$$\begin{tikzcd}
!E \arrow[r, "\mathsf{dig}_E"] \arrow[d, "\mathsf{dig}_E"'] & !!E \arrow[d, "!\mathsf{dig}_E"] \\
!!E \arrow[r, "\mathsf{dig}_{!E}"] & !!!E
\end{tikzcd}$$

Soit $m \in !E$ et $\mathcal{M} \in !!!E$.

On suppose d'abord $(m, \mathcal{M}) \in \mathsf{dig}_{!E}\ \mathsf{dig}_E$. Cela signifie que $\Sigma(\Sigma(\mathcal{M})) = m$ (noter que $\Sigma(\mathcal{M}) \in !!E$). On écrit $\mathcal{M} = [M_1, \ldots, M_k]$. Soit $m_i = \Sigma(M_i) \in !E$ pour $i = 1, \ldots, k$. Soit $M = [m_1, \ldots, m_k]$. Comme $\sum_{i=1}^k m_i = \sum_{i=1}^k \Sigma(M_i) = \Sigma(\sum_{i=1}^k M_i) = m$, on a $(m, M) \in \mathsf{dig}_E$. Par définition $(m_i, M_i) \in \mathsf{dig}_E$ pour $i = 1, \ldots, k$, donc $(M, \mathcal{M}) \in !\mathsf{dig}_E$. Donc $\mathsf{dig}_{!E}\ \mathsf{dig}_E \subseteq !\mathsf{dig}_E\ \mathsf{dig}_E$.

Réciproquement on suppose $(m, \mathcal{M}) \in !\mathsf{dig}_E\ \mathsf{dig}_E$. Soit $M \in !!E$ tel que $(m, M) \in \mathsf{dig}_E$ et $(M, \mathcal{M}) \in !\mathsf{dig}_E$. Par l'exercice 1 on a $(\Sigma(M), \Sigma(\mathcal{M})) \in \mathsf{dig}_E$ (détailler) c'est-à-dire $\Sigma(\Sigma(\mathcal{M})) = \Sigma(M) = m$, et donc $(m, \mathcal{M}) \in \mathsf{dig}_{!E}\ \mathsf{dig}_E$.

6) Pour éviter toute confusion, on utilise la notation suivante: si $s \in \mathbf{Rel}(E, F)$ et $u \in \mathcal{P}(E)$, on pose $s \cdot u = \{b \in F \mid \exists a \in E\ (a, b) \in s\}$ (c'est l'application *linéaire* de s à u). Si $u \in \mathcal{P}(E)$, on pose $u^{(!)} = \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(u) \in \mathcal{P}(!E)$. On rappelle que $1 = \{*\}$.

6.1) Vérifier que $\mathsf{der}_E \cdot u^{(!)} = u$, $\mathsf{dig}_E \cdot u^{(!)} = u^{(!)(!)}$, $\mathsf{w}_E \cdot u^{(!)} = 1$, $\mathsf{c}_E \cdot u^{(!)} = u^{(!)} \otimes u^{(!)} = u^{(!)} \times u^{(!)} \in \mathcal{P}(!E \otimes !E)$ et $!s \cdot u^{(!)} = (s \cdot u)^{(!)}$ si $s \in \mathbf{Rel}(E, F)$.

Solution $\rhd$ Noter d'abord que $[a_1, \ldots, a_n] \in u^{(!)} \Leftrightarrow a_1, \ldots, a_n \in u$. En particulier $m_1 + \cdots + m_k \in u^{(!)} \Leftrightarrow m_1, \ldots, m_k \in u^{(!)}$. On a $\mathsf{der}_E \cdot u^{(!)} = \{a \in E \mid [a] \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(u)\} = u$, $\mathsf{dig}_E \cdot u^{(!)} = \{[m_1, \ldots, m_k] \mid m_1 + \cdots + m_k \in u^{(!)}\} = \{[m_1, \ldots, m_k] \mid m_1, \ldots, m_k \in u^{(!)}\} = u^{(!)(!)}$, $\mathsf{w}_E \cdot u^{(!)} = \{*\}$ car $\emptyset \subseteq u$, $\mathsf{c}_E \cdot u^{(!)} = \{(m_1, m_2) \mid m_1 + m_2 \in u^{(!)}\} = \{(m_1, m_2) \mid m_1, m_2 \in u^{(!)}\}$. Enfin $[b_1, \ldots, b_k] \in !s \cdot u^{(!)}$ ssi $\exists a_1, \ldots, a_k\ [a_1, \ldots, a_k] \in u^{(!)}$ et $\forall i\ (a_i, b_i) \in s$ ssi $\exists a_1, \ldots, a_k\ \forall i\ (a_i \in u$ et $(a_i, b_i) \in s)$ ssi $b_1, \ldots, b_k \in s \cdot u$ ssi $[b_1, \ldots, b_k] \in (s \cdot u)^{(!)}$. $\lhd$

Soit $s \in \mathbf{Rel}(!E, F)$. On définit une fonction

$$\begin{aligned}
\widehat{s} : \mathcal{P}(E) &\to \mathcal{P}(F) \\
u &\mapsto \{b \in F \mid \exists m \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(u)\ (m, b) \in s\} = s \cdot u^{(!)}
\end{aligned}$$

6.2) Montrer que $\widehat{s}$ est une fonction Scott-continue, c'est-à-dire qu'elle est croissante et que, pour toute partie filtrante D de $\mathcal{P}(E)$ (ce qui signifie que D est non vide et $\forall u_1, u_2 \in D\, \exists u \in D\ u_1 \cup u_2 \subseteq u$), on a $\widehat{s}(\bigcup D) = \bigcup_{u \in D} \widehat{s}(u)$.

Solution $\rhd$ Soient $u_1 \subseteq u_2 \in \mathcal{P}(E)$. Alors ${u_1}^{(!)} = \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(u_1) \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(u_2) = {u_2}^{(!)}$ et donc $s \cdot {u_1}^{(!)} \subseteq s \cdot {u_2}^{(!)}$. Soit $D \subseteq \mathcal{P}(E)$ filtrante. Soit $[a_1, \ldots, a_k] \in (\cup D)^{(!)}$. Pour chaque $i = 1, \ldots, k$ il existe $u_i \in D$ tel que $a_i \in u_i$. Comme D est filtrante il existe $u \in D$ tel que $u_1, \ldots, u_k \subseteq u$ et donc $a_1, \ldots, a_k \in u$ et donc $[a_1, \ldots, a_k] \in u^{(!)}$, on vient de montrer que $(\cup D)^{(!)} \subseteq \cup D^{(!)}$ où $D^{(!)} = \{u^{(!)} \mid u \in D\}$. L'inclusion réciproque résulte de la croissante de $u \mapsto u^{(!)}$, donc on a $(\cup D)^{(!)} = \cup D^{(!)}$.

L'égalité cherchée résulte du fait que si $t \in \mathbf{Rel}(G, F)$ et si $A \subseteq \mathcal{P}(G)$, on a $b \in t \cdot \cup A$ ssi $\exists c \in \cup A\ (c, b) \in t$ ssi $\exists w \in A\ (c \in w$ et $(c, b) \in t)$ ssi $\exists w \in A\ b \in t \cdot w$ et donc $t \cdot \cup A = \cup\{t \cdot w \mid w \in A\}$. $\lhd$

6.3) Vérifier que $\widehat{\mathsf{der}_E}$ est la fonction identité.

Solution $\triangleright$ C'est juste la question (1). $\triangleleft$

6.4) (Promotion et composition dans la catégorie de Kleisli.) Si $s \in \mathbf{Rel}(!E, F)$ on définit $s^! \in \mathbf{Rel}(!E, !F)$ comme la composition suivante de morphismes:

$$!E \xrightarrow{\mathsf{dig}_E} !!E \xrightarrow{!s} !F$$

Si $u \in \mathcal{P}(E)$, vérifier que $s^! \cdot u^{(!)} = \widehat{s}(u)^{(!)}$.

Si $t \in \mathbf{Rel}(!F, G)$, on définit $t \circ s \in \mathbf{Rel}(!E, G)$ par

$$t \circ s = t\, s^! = t\, !s\ \mathsf{dig}_E\ .$$

Vérifier que $(m, c) \in t \circ s$ si et seulement si on peut trouver $k \in \mathbb{N}$ et $(m_i, b_i) \in s$ (pour $i = 1, \ldots, k$) tels que $m = m_1 + \cdots + m_k$ et $([b_1, \ldots, b_k], c) \in t$.

Solution $\triangleright$ On a $s^! \cdot u^{(!)} = (!s\ \mathsf{dig}_E) \cdot u^{(!)} = !s \cdot u^{(!)(!)} = (s \cdot u^{(!)})^{(!)} = \widehat{s}(u)^{(!)}$ par la question (1) (et le fait évident que $(t\, s) \cdot v = t \cdot (s \cdot v)$).

Pour la deuxième partie de la question il suffit de noter que, par définition de $s^!$, on a $(m, [b_1, \ldots, b_k]) \in s^!$ ssi $\exists m_1, \ldots, m_k \in !E$ $(m = m_1 + \cdots + m_k$ et $\forall i\ (m_i, b_i) \in s)$. $\triangleleft$

6.5) (Promotion généralisée.) Plus généralement si $s \in \mathbf{Rel}(!E_1 \otimes \cdots \otimes !E_n, F)$ on définit $s^! \in \mathbf{Rel}(!E_1 \otimes \cdots \otimes !E_n, !F)$ comme la composition suivante de morphismes de $\mathbf{Rel}$ (utilisant la structure lax-monoïdale du tenseur vue en cours):

$$!E_1 \otimes \cdots \otimes !E_n \xrightarrow{\mathsf{dig}_{E_1} \otimes \cdots \otimes \mathsf{dig}_{E_n}} !!E_1 \otimes \cdots \otimes !!E_n \xrightarrow{\mu^n} !(!E_1 \otimes \cdots \otimes !E_n) \xrightarrow{!s} !F$$

Décrire $s^!$. Noter que si $u_i \in \mathcal{P}(E_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$ alors $s^! \cdot ({u_1}^{(!)} \otimes \cdots \otimes {u_n}^{(!)}) = (s \cdot ({u_1}^{(!)} \otimes \cdots \otimes {u_n}^{(!)})^{(!)}$.

Solution $\triangleright$ De la même façon, on voit que $(m_1, \ldots, m_n, [b_1, \ldots, b_k]) \in s^!$ ssi on peut trouver des $(m_1^i, \ldots, m_n^i)$ pour $i = 1, \ldots, k$ tels que $(m_1^i, \ldots, m_n^i, b_i) \in s$ et $\sum_{i=1}^k m_j^i = m_j$ pour $j = 1, \ldots, n$. $\triangleleft$

6.6) Avec les notations de la question 6.4, montrer que $\widehat{t \circ s}(u) = \widehat{t}(\widehat{s}(u))$ pour tout $u \in \mathcal{P}(E)$.

Solution $\triangleright$ $\widehat{t \circ s}(u) = (t\, s^!) \cdot u^{(!)} = t \cdot (s^! \cdot u^{(!)}) = t \cdot \widehat{s}(u)^{(!)} = \widehat{t}(\widehat{s}(u))$. $\triangleleft$

6.7) Soit $s \in \mathbf{Rel}(!E, E)$ et $f = \widehat{s}$, soit $u_0 = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\emptyset)$. Montrer que $f(u_0) = u_0$ et que u_0 est le plus petit élément u de $\mathcal{P}(E)$ tel que $f(u) = u$ (u_0 est plus petit point fixe de f). On posera $\overline{\mathsf{fix}}(s) = u_0$.

Solution $\triangleright$ On a $\emptyset \subseteq f(\emptyset)$ et si $f^n(\emptyset) \subseteq f^{n+1}(\emptyset)$ alors $f^{n+1}(\emptyset) \subseteq f^{n+2}(\emptyset)$ car f est croissante. Par suite $\forall n \in \mathbb{N}\ f^n(\emptyset) \subseteq f^{n+1}(\emptyset)$. Donc $\{f^n(\emptyset \mid n \in \mathbb{N}\}$ est filtrant et par la question (2) on a $f(u_0) = \cup_{n \in \mathbb{N}} f^{n+1}(\emptyset) = u_0$ car $f^0(\emptyset) = \emptyset$. Soit maintenant $u \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(u) = u$. On a $\emptyset \subseteq u$ et, si $f^n(\emptyset) \subseteq u$, alors $f^{n+1}(\emptyset) \subseteq f(u) = u$ et donc, par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}\ f^n(\emptyset) \subseteq u$, et donc $u_0 \subseteq u$. $\triangleleft$

6.8) Montrer que u_0 est le plus petit pré-point fixe de f, c'est-à-dire le plus petit $u \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(u) \subseteq u$. Noter que cette propriété $f(u) \subseteq u$ peut se comprendre comme une propriété de "clôture par déduction" de u: si $a_1, \ldots, a_k \in u$ et $([a_1, \ldots, a_k], a) \in s$, alors $a \in u$.

Solution $\triangleright$ Exactement la même preuve que dans la question précédente (en fait la preuve ci-dessus n'utilise que le fait que $f(u) \subseteq u$). $\triangleleft$

On suppose maintenant que $E = (!(!F \multimap F) \multimap F)$ pour un ensemble F. On définit $\mathcal{Z} \in \mathbf{Rel}(!E, E)$ par $\mathcal{Z} = \mathsf{cur}\, \mathcal{Z}'$ où $\mathcal{Z}' \in \mathbf{Rel}(!E \otimes !(!F \multimap F), F)$ est la composition suivante de morphismes de $\mathbf{Rel}$ (en gardant les isos monoïdaux implicites):

$$\begin{array}{c}
!E \otimes !(!F \multimap F) \xrightarrow{!E \otimes \mathsf{c}_{!F \multimap F}} !E \otimes !(!F \multimap F) \otimes !(!F \multimap F) \xrightarrow{e \otimes \mathsf{der}_{!F \multimap F}} !F \otimes (!F \multimap F) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \mathsf{ev}\ \sigma \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad F
\end{array}$$

où $e = h^!$ (promotion généralisée) avec $h = \mathsf{ev}\,(\mathsf{der}_E \otimes !(!F \multimap F)) \in \mathbf{Rel}(!E \otimes !(!F \multimap F), F)$.

6.9) Montrer que

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} = \{(([(m_1, a_1), \dots, (m_k, a_k)], (m_1 + \cdots + m_k + [([a_1, \dots, a_k], a)], a)) \mid \\ k \in \mathbb{N},\ m_1, \dots, m_k \in !(!F \multimap F) \text{ et } a, a_1, \dots, a_k \in F\}\end{aligned}$$

Solution $\triangleright$ On a

$$h = \{((([(m, a)], m), a) \mid m \in !(!F \multimap F) \text{ et } a \in F\}$$

donc

$$\begin{aligned}e = \{((([(m_1, a_1), \dots, (m_k, a_k)], m_1 + \cdots + m_k), [a_1, \dots, a_k]) \\ \mid k \in \mathbb{N} \text{ et } a_1, \dots, a_k \in F \text{ et } m_1, \dots, m_k \in !(!F \multimap F)\}\,.\end{aligned}$$

Par suite $(M, m', a) \in \mathcal{Z}'$ si et seulement si $m' = m + m_0$ avec $((M, m, m_0), a) \in \mathsf{ev}\,\sigma\,(e \otimes \mathsf{der}_{!F \multimap F})$. Cette condition signifie qu'il existe $p \in !F$ tel que $m_0 = [(p, a)]$ et $((M, m), p) \in e$. Comme on l'a vu cette dernière condition signifie qu'on peut écrire $M = [(m_1, a_1), \dots, (m_k, a_k)]$, $m = m_1 + \cdots + m_k$ et $p = [a_1, \dots, a_k]$. Autrement dit $\mathcal{Z}'$ est l'ensemble des $(([(m_1, a_1), \dots, (m_k, a_k)], m_1 + \cdots + m_k + [([a_1, \dots, a_k], a)]), a)$ et donc $\mathcal{Z}$ a bien la valeur annoncée. $\triangleleft$

Il résulte de cette définition que si $Y_0 \in \mathcal{P}(E) = \mathbf{Rel}(!(!F \multimap F), F)$ est un "candidat opérateur de pont fixe" alors $Y_1 = \widehat{\mathcal{Z}}(Y_0) \in \mathbf{Rel}(!(!F \multimap F), F)$ vérifie que, pour tout $t \in \mathcal{P}(!F \multimap F)$

$$\widehat{Y_1}(t) = \widehat{t}(\widehat{Y_0}(t))\,.$$

En effet

$$\begin{aligned}\widehat{Y_1}(t) &= Y_1 \cdot t^{(!)} \\ &= (\mathcal{Z} \cdot {Y_0}^{(!)}) \cdot t^{(!)} \\ &= \mathcal{Z}' \cdot ({Y_0}^{(!)} \otimes t^{(!)}) \\ &= (\mathsf{ev}\,\sigma\,(e \otimes \mathsf{der}_{!F \multimap F})) \cdot ({Y_0}^{(!)} \otimes t^{(!)} \otimes t^{(!)}) \\ &= (\mathsf{ev}\,\sigma) \cdot ((Y_0 \cdot t^{(!)})^{(!)} \otimes t)\,.\end{aligned}$$

6.10) Soit $\mathcal{Y} = \overline{\mathsf{fix}}(\mathcal{Z}) \in \mathbf{Rel}(!(!F \multimap F), F)$. C'est donc le plus petit élément Y de $\mathbf{Rel}(!(!F \multimap F), F)$ tel que, si $(m_1, a_1), \dots, (m_k, a_k) \in Y$ et $a \in F$, alors $(m_1 + \cdots + m_k + [([a_1, \dots, a_k], a)], a) \in Y$.

Soit $s \in \mathbf{Rel}(!F, F) = \mathcal{P}(!F \multimap F)$.

Soit $\Phi = \widehat{\mathcal{Z}}$, on pose $Y_n = \Phi^n(\emptyset)$. Montrer par récurrence sur n que $\widehat{Y_n}(s) = f^n(\emptyset)$ (où $f = \widehat{s}$) en utilisant 6.9. En déduire que $\widehat{\mathcal{Y}}(s) = \overline{\mathsf{fix}}(s) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\emptyset)$.

Solution $\triangleright$ $Y_0 = \emptyset$ donc $\widehat{Y_0}(s) = \emptyset = f^0(\emptyset)$. Supposons que $\widehat{Y_n}(s) = f^n(\emptyset)$. Puisque $Y_{n+1} = \widehat{\mathcal{Z}}(Y_n)$, par le calcul ci-dessus on a $\widehat{Y_{n+1}}(s) = \widehat{s}(\widehat{Y_n}(s) = f^{n+1}(\emptyset)$ par hypothèse de récurrence. On a donc prouvé $\forall n \in \mathbb{N}\ \widehat{Y_n}(s) = \widehat{s}^n(\emptyset)$. Donc

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{Y}}(s) &= \widehat{\bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n}(s) \\ &= (\bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n) \cdot s^{(!)} \\ &= \bigcup_{n=0}^{\infty} (Y_n \cdot s^{(!)}) \\ &= \bigcup_{n=0}^{\infty} \widehat{s}^n(\emptyset)\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que l'application linéaire _ $\cdot$ _ est linéaire à gauche et à droite. $\triangleleft$