ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PHILIPPE GAUCHER

Produit tensoriel de matrices, homologie cyclique, homologie des algèbres de Lie.

Annales de l'institut Fourier, tome 44, nº 2 (1994), p. 413-431.

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1994__44_2_413_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
44, 2 (1994), 413-431

PRODUIT TENSORIEL DE MATRICES, HOMOLOGIE CYCLIQUE, HOMOLOGIE DES ALGÈBRES DE LIE

par Philippe GAUCHER

INTRODUCTION

L'homologie $H_*\mathfrak{gl}_\infty(A)$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_\infty(A)$, A étant une k-algèbre commutative et associative sur un corps k de caractéristique zéro, est munie d'une structure d'algèbre de Hopf (*i.e.* d'une structure d'objet en groupe de la catégorie des cogèbres [Hu]), la comultiplication étant induite par l'application diagonale et le produit (*i.e.* la loi de groupe) par la somme directe des matrices.

On montre que le produit tensoriel de matrices, après quelques transformations, induit sur $H_*\mathfrak{gl}_\infty(A)$ un produit associatif et gradué commutatif (Théorème 1.6). Ce dernier induit, sur $H_*\mathfrak{gl}_\infty(A)$, une structure d'objet en anneau de la catégorie des cogèbres [Hu], la distributivité provenant de celle (à conjugaison par une matrice de permutation près) du produit tensoriel de matrices par rapport à la somme directe des matrices.

On montre par ailleurs (Théorème 2.1) que l'algèbre symétrique SV d'une k-algèbre V possède une et une seule structure d'objet en anneau telle que la restriction de son surproduit à V redonne le produit de V et telle que la structure d'objet en groupe sous-jacente soit la structure usuelle d'algèbre de Hopf sur SV [Ab]. En particulier, l'algèbre symétrique $SHC_{*-1}(A)$ de l'homologie cyclique de A munie du produit de Loday-Quillen devient un objet en anneau. On montre qu'il est isomorphe, en tant

Mots-clés : Produit tensoriel – Algèbre extérieure – Lambda-anneau – Algèbre de Hopf – Convolution – Homologie – K-théorie – Algèbre de Lie – Homologie cyclique – Cogèbre – Objet en anneau d'une catégorie – Matrice.
Classification A.M.S. : 19D55 – 17B55 – 17B45 – 16W30 – 16W50 – 16E20 – 16U60 – 18A30 – 57T05 – 57T10 – 57T25 – 15A75.

qu'objet en anneau, à $H_*\mathfrak{gl}_\infty(A)$ (Théorèmes 2.3 et 2.4). On obtient ainsi une interprétation du produit de Loday-Quillen sur l'homologie cyclique, de nature combinatoire, en termes d'opérations sur les matrices.

I. L'HOMOLOGIE DES ALGÈBRES DE LIE

Le but est de construire sur $H_*\mathfrak{gl}_\infty(A)$ une structure d'objet en anneau à l'aide d'opérations matricielles. La somme d'un objet en anneau de la catégorie des cogèbres étant un produit, on appellera surproduit le produit d'un objet en anneau de la même catégorie.

Auparavant, faisons quelques rappels (nécessaires pour fixer les notations) sur l'homologie des algèbres de Lie. Dans ce chapitre, k est un corps de caractéristique zéro.

1. Rappel sur l'homologie des algèbres de Lie.

L'homologie de Chevalley-Eilenberg $H_*(-)$ définit un foncteur allant de la catégorie des k-algèbres de Lie dans la catégorie des k-cogèbres graduées cocommutatives, le coproduit étant induit par la diagonale. De plus ce foncteur est compatible avec les produits finis, à isomorphisme naturel près : c'est l'isomorphisme de Künneth. On notera $K(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ l'isomorphisme de Künneth allant de $H_*(\mathfrak{g}\times\mathfrak{h})$ vers $H_*\mathfrak{g}\otimes H_*\mathfrak{h}$. On posera aussi $K(\mathfrak{gl}_p(A),\mathfrak{gl}_q(A)) = K_{p,q}$.

Le foncteur $H_*\mathfrak{gl}_\infty(-)$ est un foncteur allant de la catégorie des k-algèbres dans la catégorie des k-algèbres de Hopf, le produit étant induit par la somme par bloc, notée $\oplus$, des matrices [LQ].

2. Quelques lemmes techniques sur le morphisme de Künneth.

PROPOSITION 1.1. — *Soient $f:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{h}$ et $g:\mathfrak{k}\longrightarrow\mathfrak{l}$ deux morphismes d'algèbres de Lie. Alors le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} H_*\mathfrak{g}\otimes H_*\mathfrak{k} \arrow[r, "f_*\otimes g_*"] & H_*\mathfrak{h}\otimes H_*\mathfrak{l} \\ H_*(\mathfrak{g}\times\mathfrak{k}) \arrow[u, "K(\mathfrak{g},\mathfrak{k})"'] \arrow[r, "(f,g)_*"'] & H_*(\mathfrak{h}\times\mathfrak{l}) \arrow[u, "K(\mathfrak{h},\mathfrak{l})"'] \end{tikzcd}$$

(avec $(f,g)(x,y)=(f(x),g(y))$). □

PROPOSITION 1.2 «Associativité de Künneth». — *Soient* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ *et* $\mathfrak{k}$ *trois algèbres de Lie sur un corps* k *de caractéristique zéro. Alors* $K(\mathfrak{g},\mathfrak{h}\times\mathfrak{k})(\mathrm{id}\otimes K(\mathfrak{h},\mathfrak{k})) \cong (K(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\otimes\mathrm{id})K(\mathfrak{g}\times\mathfrak{h},\mathfrak{k})$ *(isomorphisme naturel).* □

Cet isomorphisme sera noté $K(\mathfrak{g},\mathfrak{h},\mathfrak{k})$. On définit de façon analogue pour toute famille $\mathfrak{g},\dots,\mathfrak{h}$ d'algèbres de Lie un isomorphisme de $H_*(\mathfrak{g}\times \dots \times\mathfrak{h})$ à $H_*\mathfrak{g}\otimes \dots \otimes H_*\mathfrak{h}$ noté $K(\mathfrak{g},\dots,\mathfrak{h})$. Dans la suite, on notera $K(\mathfrak{gl}_p(A),\mathfrak{gl}_q(A),\mathfrak{gl}_r(A)) = K_{p,q,r}, K(\mathfrak{gl}_p(A),\mathfrak{gl}_q(A)\times\mathfrak{gl}_r(A)) = K_{p,qXr}$ etc...

THÉORÈME 1.3. — *Le foncteur* H_* *est compatible aux produits finis à isomorphisme naturel près. En particulier, l'isomorphisme de Künneth est un isomorphisme de cogèbres.*

Preuve. — A cause de la proposition précédente, il suffit de démontrer que l'isomorphisme de Künneth est un isomorphisme de cogèbres. On notera par T indistinctement le morphisme qui à $x\otimes y$ associe $y\otimes x$ ou l'application ensembliste qui au couple (x,y) associe le couple (y,x). Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ deux k-algèbres de Lie. Pour un ensemble X quelconque, on appelle D_X l'application diagonale de X qui à x de X associe (x,x) de $X\times X$. Le coproduit $\mathcal{C}$ de $H_*\mathfrak{g}\otimes H_*\mathfrak{h}$ est exactement égal à la composée :

$$(\mathrm{id}\otimes T\otimes\mathrm{id})(K(\mathfrak{g},\mathfrak{g})\otimes K(\mathfrak{h},\mathfrak{h}))((D_\mathfrak{g})_*\otimes(D_\mathfrak{h})_*).$$

Le coproduit $\mathcal{C}'$ de $H_*(\mathfrak{g}\times\mathfrak{h})$ est donné par la composée :

$$K(\mathfrak{g}\times\mathfrak{h},\mathfrak{g}\times\mathfrak{h})(D_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{h}})_*.$$

On a :

$$(K(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\otimes K(\mathfrak{g},\mathfrak{h}))\mathcal{C}' = K(\mathfrak{g},\mathfrak{h},\mathfrak{g},\mathfrak{h})(D_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{h}})_*.$$

Si X et Y sont des ensembles, la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} X\times X\times Y\times Y \arrow[r, "{(\mathrm{id},T,\mathrm{id})}"] & X\times Y\times X\times Y \\ X\times Y \arrow[u, "{(D_X,D_Y)}"'] \arrow[r, "D_{X\times Y}"] & X\times Y\times X\times Y \arrow[u, "="'] \end{tikzcd}$$

nous dit que :

$$(\mathrm{id},T,\mathrm{id})_*(D_\mathfrak{g},D_\mathfrak{h})_* = (D_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{h}})_*.$$

Donc

$$\begin{aligned}&(K(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\otimes K(\mathfrak{g},\mathfrak{h}))\mathcal{C}' = (\mathrm{id}\otimes T\otimes \mathrm{id})K(\mathfrak{g},\mathfrak{g},\mathfrak{h},\mathfrak{h})(D_{\mathfrak{g}},D_{\mathfrak{h}})*\\ &= (\mathrm{id}\otimes T\otimes \mathrm{id})(K(\mathfrak{g},\mathfrak{g})\otimes K(\mathfrak{h},\mathfrak{h}))K(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g},\mathfrak{h}\times\mathfrak{h})(D_{\mathfrak{g}},D_{\mathfrak{h}})_*\\ &= (\mathrm{id}\otimes T\otimes \mathrm{id})(K(\mathfrak{g},\mathfrak{g})\otimes K(\mathfrak{h},\mathfrak{h}))((D_{\mathfrak{g}})_*\otimes(D_{\mathfrak{h}})_*)K(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\\ &= \mathcal{C}K(\mathfrak{g},\mathfrak{h}).\end{aligned}$$ □

THÉORÈME 1.4. — *Soit A une k-algèbre commutative. Alors $K_{\infty,\infty}$ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf, le but de ce morphisme étant muni de la structure produit tensoriel des deux structures d'algèbres de Hopf et la source de ce morphisme étant munie du produit induit par la somme par bloc des matrices.*

Preuve. — Le produit $\mathcal{P}$ de $H_*\mathfrak{g}\otimes H_*\mathfrak{h}$ est exactement égal à la composée :

$$((\oplus)_*\otimes(\oplus)_*)(K^{-1}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})\otimes K^{-1}(\mathfrak{h},\mathfrak{h}))(\mathrm{id}\otimes T\otimes\mathrm{id}).$$

Le produit $\mathcal{P}'$ de $H_*(\mathfrak{g}\times\mathfrak{h})$ est donné par la composée :

$$(\oplus,\oplus)_*(\mathrm{id},T,\mathrm{id})_*K^{-1}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{h},\mathfrak{g}\times\mathfrak{h}).$$

On a alors :

$$\begin{aligned}&K(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\mathcal{P}' = K(\mathfrak{g},\mathfrak{h})(\oplus,\oplus)_*(\mathrm{id},T,\mathrm{id})_*K^{-1}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{h},\mathfrak{g}\times\mathfrak{h})\\ &= ((\oplus)_*\otimes(\oplus)_*)(K^{-1}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})\otimes K^{-1}(\mathfrak{h},\mathfrak{h}))K(\mathfrak{g},\mathfrak{g},\mathfrak{h},\mathfrak{h})(\mathrm{id},T,\mathrm{id})_*K^{-1}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{h},\mathfrak{g}\times\mathfrak{h})\\ &= \mathcal{P}(K(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\otimes K(\mathfrak{g},\mathfrak{h}))\end{aligned}$$

car $K(\mathfrak{g},\mathfrak{h},\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = (K(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\otimes K(\mathfrak{g},\mathfrak{h}))K(\mathfrak{g}\times\mathfrak{h},\mathfrak{g}\times\mathfrak{h})$ (cette dernière égalité se démontrant par un exercice d'écriture sur les chaînes). □

3. Le lemme fondamental.

Si f et g sont deux morphismes de cogèbres de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{H}$ (où $\mathcal{C}$ est une cogèbre), on pose

$$(f\,\underline{\oplus}\,g)(x) = \sum_{(x)} f(x_{(1)})g(x_{(2)})$$

où

$$\Delta(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}.$$

Remarque. — On sait [Ab] que l'ensemble des morphismes de cogèbres de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{H}$ est un groupe pour $\underline{\oplus}$, l'unité étant la composée de l'unité de $\mathcal{H}$ par la co-unité de $\mathcal{C}$ et l'inverse de f pour $\underline{\oplus}$ étant Sf (la composée de l'antipode S de $\mathcal{H}$ par f). On notera $f \underline{\ominus} g$ pour $f \underline{\oplus} (Sg)$. On se servira également de l'égalité suivante (f, g et h étant des morphismes de cogèbres) : $(f \underline{\oplus} g)h = (fh) \underline{\oplus} (gh)$.

Voici la clé de voûte de cet article :

PROPOSITION 1.5. — *Si $\mathfrak{g}$ est une k-algèbre de Lie et f et g sont deux morphismes d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{gl}_\infty(A)$ alors le morphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{gl}_\infty(A)$ noté $f \oplus g$ qui envoie x sur $f(x) \oplus g(x)$ où $\oplus$ est la somme par bloc des matrices vérifie la propriété suivante :*

$$(f \oplus g)_* = f_* \underline{\oplus} g_*.$$

Preuve. — On considère le diagramme suivant, commutatif à conjugaison près :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \xrightarrow{(f,g)} & \mathfrak{gl}_\infty(A) \times \mathfrak{gl}_\infty(A) & \xrightarrow{\oplus} & \mathfrak{gl}_\infty(A) \\
\uparrow \Delta & & & & \uparrow = \\
\mathfrak{g} & & \xrightarrow{f \oplus g} & & \mathfrak{gl}_\infty(A)
\end{array}$$

où $f \oplus g$ est le morphisme défini plus haut, $\Delta(x) = (x, x)$ pour tout x dans $\mathfrak{g}$ et $(f,g)(x,y) = (f(x), g(y))$ pour tout x et y dans $\mathfrak{g}$. Puis on prend son image par le foncteur H_* défini ci-dessus. On obtient alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
H_*\mathfrak{g} \otimes H_*\mathfrak{g} & \xrightarrow{f_* \otimes g_*} & H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A)) \otimes H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A)) & \xrightarrow{\oplus_*} & H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A)) \\
\uparrow \Delta & & & & \uparrow = \\
H_*\mathfrak{g} & & \xrightarrow{(f \oplus g)_*} & & H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A))
\end{array}$$

ce qui termine la preuve. $\square$

4. Construction du surproduit.

Si $\alpha \in \mathrm{End}_{A-\text{linéaire}}(M)$ et $\beta \in \mathrm{End}_{A-\text{linéaire}}(N)$, M et N étant deux A-modules, $\alpha\otimes\beta \in \mathrm{End}_{A-\text{linéaire}}(M\otimes N)$, le produit tensoriel $M\otimes N$ étant au-dessus de k, est défini de la façon suivante : $(\alpha\otimes\beta)(x\otimes y) = \alpha(x)\otimes\beta(y)$. Le choix, pour tout entier $p \geq 1$ et $q \geq 1$, d'un isomorphisme de A-modules identifiant la base canonique de $A^{\otimes pq}$ et celle de $A^p \otimes A^q$ permet alors de définir une application ensembliste de $\mathfrak{gl}_p(A)\times\mathfrak{gl}_q(A)$ dans $\mathfrak{gl}_{pq}(A)$ vérifiant les propriétés suivantes : $(\alpha\otimes\beta)(\gamma\otimes\delta) = (\alpha\beta)\otimes(\gamma\delta)$, $\mathrm{Trace}(\alpha\otimes\beta) = \mathrm{Trace}(\alpha)\mathrm{Trace}(\beta)$, $(\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma$ est conjuguée à $\alpha\otimes(\beta\otimes\gamma)$ par une matrice de permutations qui ne dépend ni de α ni de β ni de γ, $\alpha\otimes\beta$ est conjuguée à $\beta\otimes\alpha$ par une matrice de permutation qui ne dépend ni de α ni de β [Bo]. Introduisons alors les morphismes d'algèbres de Lie suivants :

$$f_{p,q} : \mathfrak{gl}_p(A)\times\mathfrak{gl}_q(A) \longrightarrow \mathfrak{gl}_\infty(A) \text{ et } g_{p,q} : \mathfrak{gl}_p(A)\times\mathfrak{gl}_q(A) \longrightarrow \mathfrak{gl}_\infty(A)$$
$$f_{p,q}(\alpha,\beta) = (\alpha\otimes\mathrm{id}_q) + (\mathrm{id}_p\otimes\beta) \qquad g_{p,q}(\alpha,\beta) = (\alpha\otimes\mathrm{id}_q)\oplus(\mathrm{id}_p\otimes\beta).$$

THÉORÈME 1.6. — *L'application $(h_{p,q})_* = (f_{p,q})_* \underline{\ominus} (g_{p,q})_*$ permet de définir, par passage à la limite inductive, un surproduit non unitaire sur l'algèbre de Hopf $H_*\mathfrak{gl}_\infty(A)$.*

Preuve. — On vérifie aisément que les matrices $f_{p,q}(\alpha,\beta)\oplus g_{p+h,q+k}(\alpha\oplus 0_h,\beta\oplus 0_k)$ et $f_{p+h,q+k}(\alpha\oplus 0_h,\beta\oplus 0_k)\oplus g_{p,q}(\alpha,\beta)$ sont conjuguées par une matrice de permutation qui ne dépend que de p, q, h et k. On en déduit alors, avec la proposition 1.5, que :

$$(f_{p,q})_* \underline{\oplus} (g_{p+h,q+k}\circ i_{p,q}^{p+h,q+k})_* = (f_{p+h,q+k}\circ i_{p,q}^{p+h,q+k})_* \underline{\oplus} (g_{p,q})_*$$

où

$$i_{p,q}^{p+h,q+k}(\alpha,\beta) = (\alpha\oplus 0_h,\beta\oplus 0_k).$$

Alors on obtient

$$(f_{p,q})_* \underline{\ominus} (g_{p,q})_* = (f_{p+h,q+k}\, i_{p,q}^{p+h,q+k})_* \underline{\ominus} (g_{p+h,q+k}\, i_{p,q}^{p+h,q+k})_*$$

soit

$$(h_{p,q})_* = (h_{p+h,q+k})_*(i_{p,q}^{p+h,q+k})_*.$$

C'est suffisant pour dire que la limite inductive des $(h_{p,q})_*$ existe et elle sera notée h_*. Posons $x\,\tilde{\otimes}\,y = h_*(K_{\infty,\infty}^{-1}(x\otimes y))$.

LEMME 1.7. — *Pour tout $x \in H_*\mathfrak{gl}_\infty(A)$, on a $x \tilde{\otimes} 1 = 1 \tilde{\otimes} x = c(x)1$.*

Preuve. — On a clairement

$$(h_{p,q})_* K_{p,q}^{-1}(1 \otimes 1) = 1$$

d'où, en se rappelant la compatibilité du morphisme de Künneth avec les limites inductives : $1 \tilde{\otimes} 1 = 1$. Si x est un élément de $H_*\mathfrak{gl}_p(A)$ alors

$$(f_{p,q})_* K_{p,q}^{-1}(x \otimes 1) = (g_{p,q})_* K_{p,q}^{-1}(x \otimes 1).$$

En effet, en supposant x représenté par la chaîne $\sum x_1 \wedge \ldots \wedge x_r$ alors $K_{p,q}^{-1}(x \otimes 1)$ est représenté par la chaîne $\sum(x_1, 0_q) \wedge \ldots \wedge (x_r, 0_q)$ puis $(f_{p,q})_* K_{p,q}^{-1}(x \otimes 1)$ par la chaîne

$$\sum (x_1 \otimes \mathrm{id}_q) \wedge \ldots \wedge (x_r \otimes \mathrm{id}_q).$$

De la même façon,

$$(g_{p,q})_* K_{p,q}^{-1}(x \otimes 1)$$

est représenté par la chaîne $\sum(x_1 \otimes \mathrm{id}_q) \wedge \ldots \wedge (x_r \otimes \mathrm{id}_q)$.

Soit P_r l'énoncé : «quels que soient les entiers p et q supérieurs ou égaux à 1, pour tout x de longueur $\leq r$ dans $H_*\mathfrak{gl}_p(A)$ on a

$$(h_{p,q})_* K_{p,q}^{-1}(x \otimes 1) = 0».$$

On va démontrer P_r par récurrence sur r.

Si $r = 1$, $\Delta(x \otimes 1) = (x \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1) + (1 \otimes 1) \otimes (x \otimes 1)$, mais

$$(f_{p,q})_* K_{p,q}^{-1} = (g_{p,q})_* K_{p,q}^{-1} \underline{\oplus} (h_{p,q})_* K_{p,q}^{-1}$$

on obtient donc

$$\begin{aligned}(f_{p,q})_* K_{p,q}^{-1}(x \otimes 1) = (g_{p,q})_* K_{p,q}^{-1}(x \otimes 1)(h_{p,q})_* K_{p,q}^{-1}(1 \otimes 1)\\ +(g_{p,q})_* K_{p,q}^{-1}(1 \otimes 1)(h_{p,q})_* K_{p,q}^{-1}(x \otimes 1)\end{aligned}$$

soit

$$(f_{p,q})_* K_{p,q}^{-1}(x \otimes 1) = (g_{p,q})_* K_{p,q}^{-1}(x \otimes 1) + (h_{p,q})_* K_{p,q}^{-1}(x \otimes 1),$$

donc $(h_{p,q})_* K_{p,q}^{-1}(x \otimes 1) = 0$ d'où P_1.

Supposons P_r vrai. On prend maintenant $x = x_1...x_{r+1}$ où les x_i sont de longueur 1. Alors par définition du produit tensoriel de deux bigèbres [Ab] :

$$\begin{aligned}\Delta(x \otimes 1) &= \Delta((x_1 \otimes 1)...(x_{r+1} \otimes 1))\\ &= \Delta(x_1 \otimes 1)...\Delta(x_{r+1} \otimes 1)\\ &= ((x_1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1) + (1 \otimes 1) \otimes (x_1 \otimes 1))...((x_{r+1} \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1)\\ &\quad + (1 \otimes 1) \otimes (x_{r+1} \otimes 1))\\ &= \sum_\sigma (x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(s)} \otimes 1) \otimes (x_{\sigma(s+1)}...x_{\sigma(r+1)} \otimes 1)\end{aligned}$$

(somme sur tous les $(s, r - s)$ shuffles σ et tous les s compris entre 0 et $r + 1$ au sens large).

Donc

$$\begin{aligned}((f_{p,q})_* K_{p,q}^{-1}(x \otimes 1) &= \sum_\sigma (g_{p,q})_* K_{p,q}^{-1}(x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(s)} \otimes 1)(h_{p,q})_*\\ &\quad \cdot K_{p,q}^{-1}(x_{\sigma(s+1)}...x_{\sigma(r+1)} \otimes 1)\\ &= (g_{p,q})_* K_{p,q}^{-1}(x \otimes 1) + (h_{p,q})_* K_{p,q}^{-1}(x \otimes 1)\\ &\qquad\qquad \text{(d'après } P_r)\end{aligned}$$

d'où P_{r+1}. On conclut la démonstration en se rappelant que le morphisme de Künneth est compatible avec les limites inductives. □

La structure obtenue n'est donc pas unitaire car une éventuelle unité serait de degré 0 donc dans k.

LEMME 1.8. — *Soient $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{k}$ trois algèbres de Lie. On considère les morphismes d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h} \times \mathfrak{k}$ dans respectivement $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g} \times \mathfrak{k}$, $\mathfrak{h} \times \mathfrak{k}$ définis par :*

$$\text{oubli}_3(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, \beta),\ \text{oubli}_2(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma), \text{oubli}_1(\alpha, \beta, \gamma) = (\beta, \gamma).$$

Alors on a

$$K(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})(\text{oubli}_1)_* K^{-1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})(x \otimes y \otimes z) = c(x) y \otimes z$$
$$K(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})(\text{oubli}_2)_* K^{-1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})(x \otimes y \otimes z) = c(y) x \otimes z$$
$$K(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})(\text{oubli}_3)_* K^{-1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k})(x \otimes y \otimes z) = c(z) x \otimes y.$$ □

Compte tenu de (1.5), on a :

$$(f_{p,r+s})_*(\text{id}, \oplus)_* = \{(f_{p,r})_*(\text{oubli}_3)_*\} \underline{\oplus} \{(f_{p,s})_*(\text{oubli}_2)_*\}$$

et

$$(g_{p,r+s})_*(\mathrm{id}, \oplus)* = \{(g_{p,r})_*(\mathrm{oubli}_3)_*\} \underline{\oplus} \{(g_{p,s})_*(\mathrm{oubli}_2)_*\}$$

donc

$$h_*(\mathrm{id}, \oplus)_* = \{h_*(\mathrm{oubli}_3)_*\} \underline{\oplus} \{h_*(\mathrm{oubli}_2)_*\}$$

donc, d'après (1.3),

$$h_* K^{-1}_{\infty,\infty}(\mathrm{id} \otimes \oplus_*) K_{\infty,\infty\times\infty} = \{h_* K^{-1}_{\infty,\infty} K_{\infty,\infty}(\mathrm{oubli}_3)_*\} \\ \underline{\oplus} \{h_* K^{-1}_{\infty,\infty} K_{\infty,\infty}(\mathrm{oubli}_2)_*\}$$

donc, le morphisme de Künneth étant un morphisme de cogèbres,

$$h_* K^{-1}_{\infty,\infty}(\mathrm{id} \otimes \oplus_*) K_{\infty,\infty x \infty} K^{-1}_{\infty,\infty,\infty} = \{h_* K^{-1}_{\infty,\infty} K_{\infty,\infty}(\mathrm{oubli}_3)_* K^{-1}_{\infty,\infty,\infty}\} \\ \underline{\oplus} \{h * K^{-1}_{\infty,\infty} K_{\infty,\infty}(\mathrm{oubli}_2)_* K^{-1}_{\infty,\infty,\infty}\}$$

donc, avec

$$K_{\infty,\infty x\infty} K^{-1}_{\infty,\infty,\infty} = \mathrm{id} \otimes K^{-1}_{\infty,\infty}$$

qui se démontre par un exercice d'écriture sur les chaînes, on obtient l'égalité (1.8.1) :

$$h_* K^{-1}_{\infty,\infty}(\mathrm{id} \otimes (\oplus_* * K^{-1}_{\infty,\infty})) = \{h_* K^{-1}_{\infty,\infty} K_{\infty,\infty}(\mathrm{oubli}_3)_* K^{-1}_{\infty,\infty,\infty}\} \\ \underline{\oplus} \{h_* K^{-1}_{\infty,\infty} K_{\infty,\infty}(\mathrm{oubli}_2)_* K^{-1}_{\infty,\infty,\infty}\}.$$

En composant les deux membres de l'égalité (1.8.1) à droite par $K^{-1}_{\infty,\infty,\infty}$ et en évaluant (1.8.1) en $x \otimes y \otimes z$, on obtient à l'aide du lemme (1.8) ($x_{(1)}y_{(1)}z_{(1)}x_{(2)}y_{(2)}z_{(2)} = \varepsilon x_{(1)}x_{(2)}y_{(1)}y_{(2)}z_{(1)}z_{(2)}$) :

$$\begin{aligned} x \,\tilde{\otimes}\, (yz) &= \sum_{(x)(y)(z)} \varepsilon c(z_{(1)})(x_{(1)} \,\tilde{\otimes}\, y_{(1)}) c(y_{(2)})(x_{(2)} \,\tilde{\otimes}\, z_{(2)}) \\ &= \sum_{(x)} \varepsilon (x_{(1)} \,\tilde{\otimes}\, y)(x_{(2)} \,\tilde{\otimes}\, z). \end{aligned}$$

Pour la gradué-commutativité, il suffit de remarquer que si α est de taille p, alors $\alpha \otimes \mathrm{id}_q$ qui est de taille pq est conjuguée à $\mathrm{id}_q \otimes \alpha$.

LEMME 1.9. — *Si α désigne une matrice de taille p, β une matrice de taille q, γ une matrice de taille r, les deux matrices suivantes sont conjuguées par une matrice de permutation qui ne dépend que de p, q et r :*

$$\begin{aligned}A1 &= f_{p,qr}(\alpha, f_{q,r}(\beta,\gamma)) \oplus g_{pq,r}(f_{p,q}(\alpha,\beta),\gamma) \oplus f_{2pq,r}(g_{p,q}(\alpha,\beta),\gamma)\\ &\quad \oplus g_{p,2qr}(\alpha, g_{q,r}(\beta,\gamma))))\\ A2 &= f_{pq,r}(f_{p,q}(\alpha,\beta),\gamma) \oplus g_{p,qr}(\alpha, f_{q,r}(\beta,\gamma)) \oplus f_{p,2qr}(\alpha, g_{q,r}(\beta,\gamma))\\ &\quad \oplus g_{2pq,r}(g_{p,q}(\alpha,\beta),\gamma))).\end{aligned}$$

Preuve. — C'est un exercice d'écriture sur les matrices. □

Donc (avec (1.5))

$$\begin{aligned}&(f_{p,qr})_*(\mathrm{id}, f_{q,r})_* \underline{\oplus} (g_{pq,r})_*(f_{p,q},\mathrm{id})_* \underline{\oplus} (f_{2pq,r})_*(g_{p,q},\mathrm{id})_* \underline{\oplus} (g_{p,2qr})_*(\mathrm{id}, g_{q,r})_*\\ &\quad = (g_{p,qr})_*(\mathrm{id}, f_{q,r})_* \underline{\oplus} (f_{pq,r})_*(f_{p,q},\mathrm{id})_* \underline{\oplus} (g_{2pq,r})_*(g_{p,q},\mathrm{id})_* \underline{\oplus} (f_{p,2qr})_*(\mathrm{id}, g_{q,r})_*,\end{aligned}$$

donc

$$(h_{p,qr})_*(\mathrm{id}, f_{q,r})_* \underline{\oplus} (h_{2pq,r})_*(g_{p,q},\mathrm{id})_* = (h_{pq,r})_*(f_{p,q},\mathrm{id})_* \underline{\oplus} (h_{p,2qr})_*(\mathrm{id}, g_{q,r})_*,$$

donc , en passant à la limite inductive :

$$h_*(\mathrm{id}, f_{q,r})_* \underline{\oplus} h_*(g_{p,q},\mathrm{id})_* = h_*(f_{p,q},\mathrm{id})_* \underline{\oplus} h_*(\mathrm{id}, g_{q,r})_*.$$

Mais

$$\begin{aligned}&(h_* K^{-1}_{\infty,\infty}(\mathrm{id}\otimes(g_{q,r})_*) \underline{\oplus} h_* K^{-1}_{\infty,\infty}(\mathrm{id}\otimes(h_{q,r})_*))(x\otimes y)\\ &\qquad = \sum_{(x)(y)} \varepsilon(x_{(1)} \tilde{\otimes} (g_{q,r})_*(y_{(1)}))(x_{(2)} \tilde{\otimes} (h_{q,r})_*(y_{(2)}))\\ &\qquad (\text{avec } x_{(1)}y_{(1)}x_{(2)}y_{(2)} = \varepsilon x_{(1)}x_{(2)}y_{(1)}y_{(2)})\\ &\qquad = \sum_{(y)} x \tilde{\otimes} ((g_{q,r})_*(y(1))(h_{q,r})_*(y_{(2)}))\\ &\qquad = x \tilde{\otimes} (f_{q,r})_*(y).\end{aligned}$$

Ainsi on obtient :

$$(h_* K^{-1}_{\infty,\infty}(\mathrm{id}\otimes(g_{q,r})_*) \underline{\oplus} h_* K^{-1}_{\infty,\infty}(\mathrm{id}\otimes(h_{q,r})_*)) = h_* K^{-1}_{\infty,\infty}(\mathrm{id}\otimes(f_{q,r})_*).$$

Ainsi

$$h_*(\mathrm{id}, f_{q,r})_* \underline{\ominus} h_*(\mathrm{id}, g_{q,r})_* = h_* K^{-1}_{\infty,\infty}(\mathrm{id}\otimes h_*) K_{\infty,\infty X\infty}$$

et de la même façon

$$h_*(f_{p,q},\mathrm{id})_* \underline{\ominus} h_*(g_{p,q},\mathrm{id})_* = h_* K^{-1}_{\infty,\infty}(h_*\otimes \mathrm{id}) K_{\infty X\infty,\infty}$$

d'où (avec l'égalité déjà mentionnée

$K_{\infty,\infty X\infty} K^{-1}_{\infty,\infty,\infty} = \mathrm{id}\otimes K^{-1}_{\infty,\infty}$ et avec $K_{\infty X\infty,\infty} K^{-1}_{\infty,\infty,\infty} = K^{-1}_{\infty,\infty}\otimes \mathrm{id}$

qui se démontre également par un exercice d'écriture sur les chaînes) en composant à droite par $K^{-1}_{\infty,\infty,\infty}$:

$$h_* K^{-1}_{\infty,\infty}(\mathrm{id} \otimes h_* K^{-1}_{\infty,\infty}) = h_* K^{-1}_{\infty,\infty}(h_* K^{-1}_{\infty,\infty} \otimes \mathrm{id})$$

d'où l'associativité. □

II. L'ALGÈBRE SYMÉTRIQUE DE L'HOMOLOGIE CYCLIQUE DE A

THÉORÈME 2.1. — *Soit V une k-algèbre. La k-algèbre de Hopf SV possède une et une seule structure d'objet en anneau (de la catégorie des cogèbres) telle que la restriction du surproduit à V coïncide avec le produit de V.*

Remarque. — La structure d'objet en groupe sous-jacente est la structure classique d'algèbre de Hopf.

Preuve. — La distributivité du surproduit par rapport au produit dans un objet en anneau $\mathcal{H}$ s'exprime de la manière suivante. Si x, y et z sont dans h alors :

$$\Delta(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)} \Longrightarrow x \,\tilde{\otimes}\, (yz) = \sum_{(x)} (x_{(1)} \,\tilde{\otimes}\, y)(x_{(2)} \,\tilde{\otimes}\, z).$$

Soient alors $x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q$ $p+q$ éléments de V où p et q sont des entiers supérieurs ou égaux à 1. Si Σ_p désigne le groupe symétrique d'ordre p, posons :

$$(x_1...x_p) \,\tilde{\otimes}\, (y_1...y_q) = 0 \quad \text{si} \quad p \neq q,$$
$$(x_1...x_p) \,\tilde{\otimes}\, (y_1...y_q)) = \sum_{\sigma \in \Sigma_p} (x_{\sigma(1)} \,\tilde{\otimes}\, y_1)...(x_{\sigma(p)} \,\tilde{\otimes}\, y_p) \quad \text{si} \quad p = q \geq 2,$$
$$(x_1...x_p) \,\tilde{\otimes}\, 1 = 1 \,\tilde{\otimes}\, (y_1...y_q) = 0 \quad \text{et} \quad 1 \,\tilde{\otimes}\, 1 = 1.$$

Le fait que $\tilde{\otimes}$ soit bien défini est évident, vu la k-liberté (k est toujours un corps de caractéristique zéro). La vérification des autres propriétés est entièrement mécanique. □

L'homologie cyclique de A, notée $HC_*(A)$, est muni d'un produit [LQ], dit produit de Loday-Quillen.

COROLLAIRE 2.2. — *L'algèbre symétrique graduée $SHC_*(A)$ de l'homologie cyclique munie du produit de Loday-Quillen est munie d'un et un seul surproduit étendant le produit de Loday-Quillen et tel qu'il induise sur $SHC_*(A)$ une structure d'objet en anneau (de la catégorie des cogèbres), la structure d'objet en groupe sous-jacente étant la structure classique d'algèbre de Hopf.*

Notons $\mathrm{Prim} H_*\mathfrak{gl}_\infty(A)$ la partie primitive de la cogèbre $H_*\mathfrak{gl}_\infty(A)$. On est alors en mesure d'énoncer le

THÉORÈME 2.3. — *L'isomorphisme* $\mathrm{Prim}\, H_*\mathfrak{gl}_\infty(A) \longrightarrow HC_{*-1}(A)$ *d'algèbres de Hopf décrit dans [LQ] induit un isomorphisme $H_*\mathfrak{gl}_\infty(A) \longrightarrow SHC^*_{-1}(A)$ d'objets en anneau de la catégorie des cogèbres.*

Preuve. — Soient $x, y \in \mathrm{Prim}\, H_*\mathfrak{gl}_\infty(A)$ alors

$$\begin{aligned}\Delta(x \tilde{\otimes} y) = \Delta(x) \tilde{\otimes} \Delta(y) &= \left(\sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}\right) \tilde{\otimes} \left(\sum_{(y)} y_{(1)} \otimes y_{(2)}\right) \\ &= (x \otimes 1 + 1 \otimes x) \tilde{\otimes} (y \otimes 1 + 1 \otimes y) \\ &= (x \tilde{\otimes} y) \otimes 1 + 1 \otimes (x \tilde{\otimes} y).\end{aligned}$$

Donc le surproduit définit une structure d'algèbre sur $\mathrm{Prim}\, H_*\mathfrak{gl}_\infty(A)$. À cause du théorème de Milnor-Moore [Ab] [MM] et du théorème (2.1), il suffit de démontrer le

THÉORÈME 2.4. — *L'isomorphisme de k-algèbres de Hopf de Loday-Quillen entre* $\mathrm{Prim}\, H_*\mathfrak{gl}_\infty(A)$ *et $HC_{*-1}(A)$ est compatible avec respectivement la restriction du surproduit venant du produit tensoriel de matrices et le produit de Loday-Quillen.*

On obtient ainsi une interprétation du produit de Loday-Quillen, de nature combinatoire, en termes d'opérations de matrices.

Si SV est l'algèbre symétrique d'un k-espace vectoriel V, appelons π la projection de SV sur V parallèlement à $V^{\otimes 2} \oplus V^{\otimes 3} \oplus \ldots$

LEMME 2.5. — *Si x et y sont deux éléments primitifs dans $H_*\mathfrak{gl}_\infty(A)$, alors $\pi(g)_* K_{p,q}^{-1}(x \otimes y) = 0$.*

Preuve du lemme. — On travaille sur des chaînes dans le complexe de Chevalley-Eilenberg. Ecrivons $x = x_1 \wedge \ldots \wedge x_p$ et $y = y_1 \wedge \ldots \wedge y_q$. Alors par Künneth, $x \otimes y$ devient

$$(x_1, 0_q) \wedge ... \wedge (x_p, 0_q) \wedge (0_p, y_1) \wedge ... \wedge (0_p, y_q)$$

puis par $g_{p,q}$, on obtient

$$\begin{pmatrix} x_1 \otimes \mathrm{id}_q & 0 \\ 0 & 0_{pq} \end{pmatrix} \wedge \ldots \wedge \begin{pmatrix} 0_{pq} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_p \otimes y_q \end{pmatrix}$$

ce qui n'est pas autre chose que

$$\{(x1 \otimes \mathrm{id}_q) \wedge ... \wedge (x_p \otimes \mathrm{id}_q)\}\{(\mathrm{id}_p \otimes y_1) \wedge ... \wedge (\mathrm{id}_p \otimes y_q)\}$$

soit

$$(g_{p,q})_* K_{p,q}^{-1}(x \otimes 1)(g_{p,q})_* K_{p,q}^{-1}(1 \otimes y).$$

Ainsi

$$(g_{p,q})_* K_{p,q}^{-1}(x \otimes y) = ((g_{p,q})_* K_{p,q}^{-1})(x \otimes 1)((g_{p,q})_* K_{p,q}^{-1})(1 \otimes y).$$

Mais $x \otimes 1$ et $1 \otimes y$ sont dans $\mathrm{Prim}(H_*\mathfrak{gl}_\infty(A) \otimes H_*\mathfrak{gl}_\infty(A))$ donc $((g_{p,q})_* K_{p,q}^{-1}(x \otimes 1)$ et $((g_{p,q})_* K_{p,q}^{-1})(1 \otimes y)$ sont primitifs. Ainsi $((g_{p,q})_* K_{p,q}^{-1})(x \otimes y)$ est de longueur 2 d'où le lemme. □

Preuve du théorème. — Comme x et y sont des éléments primitifs, on a

$$\Delta(x \otimes y) = (x \otimes y) \otimes (1 \otimes 1) + (x \otimes 1) \otimes (1 \otimes y) + (1 \otimes y) \otimes (x \otimes 1) + (1 \otimes 1) \otimes (x \otimes y)$$

donc

$$\begin{aligned}((f_{p,q})_* K_{p,q}^{-1})(x \otimes y) = {} & ((g_{p,q})_* K_{p,q}^{-1})(x \otimes y)((h_{p,q})_* K_{p,q}^{-1})(1 \otimes 1) \\ & + ((g_{p,q})_* K_{p,q}^{-1})(x \otimes 1)((h_{p,q})_* K_{p,q}^{-1})(1 \otimes y) \\ & + ((g_{p,q})_* K_{p,q}^{-1})(1 \otimes y)((h_{p,q})_* K_{p,q}^{-1})(x \otimes 1) \\ & + ((g_{p,q})_* K_{p,q}^{-1})(1 \otimes 1)((h_{p,q})_* K_{p,q}^{-1})(x \otimes y)\end{aligned}$$

donc

$$((f_{p,q})_* K_{p,q}^{-1})(x \otimes y) = ((g_{p,q})_* K_{p,q}^{-1})(x \otimes y) + ((h_{p,q})_* K_{p,q}^{-1})(x \otimes y)$$

car

$$((h_{p,q})_* K_{p,q}^{-1})(1 \otimes y) = 0 = ((h_{p,q})_* K_{p,q}^{-1})(x \otimes 1)$$

(l'égalité de droite vient de l'énoncé P_r dans la démonstration du lemme (1.7) et l'égalité de gauche se démontre comme celle de droite). On obtient alors

$$\pi(h_{p,q})_* K_{p,q}^{-1}(x \otimes y) = \pi(f_{p,q})_* K_{p,q}^{-1}(x \otimes y).$$

On va travailler avec des chaînes. On prend $(a_1, ..., a_p)$ dans $C_{p-1}(A)$ et $(a_{p+1}, ..., a_{p+q})$ dans $C_{q-1}(A)$.
Par l'isomorphisme $HC_{*-1}(A) \cong \mathrm{Prim}(H_* \mathfrak{gl}_\infty(A))$, la classe de $(a_1, ..., a_p)$ est envoyée sur la classe de $a_1 E_{1,2} \wedge a_2 E_{2,3} \wedge ... \wedge a_p E_{p,1}$ et la classe de $(a_{p+1}, ..., a_{p+q})$ est envoyée sur la classe de $a_{p+1} E_{1,2} \wedge a_{p+2} E_{2,3} \wedge ... \wedge a_{p+q} E_{q,1}$ où $E_{i,j}$ représente la matrice qui a des zéros partout sauf sur la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne où il y a un 1. Comme on peut se limiter à la considération de f pour le calcul du surproduit dans ce cas, alors le surproduit de la classe de $a_1 E_{1,2} \wedge a_2 E_{2,3} \wedge ... \wedge a_p E_{p,1}$ et celle de $a_{p+1} E_{1,2} \wedge a_{p+2} E_{2,3} \wedge ... \wedge a_{p+q} E_{q,1}$ est la classe de

$$X = a_1(E_{12} \otimes \mathrm{id}_q) \wedge ... \wedge a_p(E_{p,1} \otimes \mathrm{id}_q) \wedge a_{p+1}(\mathrm{id}_p \otimes E_{1,2}) \wedge ... \wedge a_{p+q}(\mathrm{id}_p \otimes E_{q,1}).$$

Pour la suite de la démonstration, on a besoin d'un complexe intermédiaire introduit dans [LQ] dont l'homologie est isomorphe à l'homologie cyclique de A. Le module des n-chaînes est égal à $(k[U_n] \otimes A \otimes n) \otimes \Sigma_n$ (sgn) où le groupe Σ_n agit à gauche sur $A^{\otimes n}$ par $\sigma.(a_1, ..., a_n) = (a_{\sigma^{-1}(1)}, ..., a_{\sigma^{-1}(n)})$, à droite par $(a_1, ..., a_n).\sigma = (a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(n)})$, à gauche sur (sgn) par la signature ((sgn) $\cong k$ en tant qu'espace); l'ensemble U_n est l'ensemble des permutations n'ayant qu'un seul cycle sur lequel Σ_n agit à droite par conjugaison. La classe de $(a_1, ..., a_p)$ correspond à la classe de $\tau_p \otimes (a_1, ..., a_p) \otimes 1$ et la classe de $(a_{p+1}, ..., a_{p+q})$ correspond à la classe de $\tau_q \otimes (a_{p+1}, ..., a_{p+q}) \otimes 1$ où τ_n est le cycle $(1\ 2\ ...\ n)$. La classe de la chaîne $a_1 M_1 \wedge ... \wedge a_n M_n$ dans le complexe de Chevalley-Eilenberg (où les a_i sont dans A et les M_j sont des matrices à coefficient dans k) correspond à la classe de

$$\sum_{\sigma \in U_n} T(\sigma)(M_1 \otimes ... \otimes M_n)\sigma \otimes (a_1, ..., a_p) \otimes 1$$

où si $\sigma = (x...y)$ alors $T(\sigma)(M_1 \otimes ... \otimes M_n) = \mathrm{Trace}(M_x ... M_y)$. La classe de X correspond donc à la classe de

$$\sum_{\sigma \in U_{p+q}} T(\sigma)((E_{1,2} \otimes \mathrm{id}_q) \otimes ... \otimes (E_{p,1} \otimes \mathrm{id}_q) \otimes (\mathrm{id}_p \otimes E_{1,2}) ... (\mathrm{id}_p \otimes E_{q,1}))\sigma$$
$$\otimes (a_1, ..., a_p, a_{p+1}, ..., a_{p+q}) \otimes 1.$$

Mais la trace d'un produit tensoriel de matrices est égale au produit des traces. Donc la classe de X correspond à la classe de

$$\sum_{\sigma\in U_{p+q}} T(\sigma)(E_{1,2}\otimes ...\otimes E_{p,1}\otimes \mathrm{id}_p^{\otimes q})T(\sigma)(\mathrm{id}_q^{\otimes p}\otimes E_{1,2}\otimes ...\otimes E_{q,1})\sigma$$
$$\otimes(a_1,...,a_p,a_{p+1},...,a_{p+q})\otimes 1.$$

Pour un cycle σ donné, il existe une et une seule permutation g de Σ_{p+q} telle que $g(1)=1$ et telle que $\sigma=(g(1),...,g(p+q))$. Vu que $E_{i,j}E_{k,l}=\delta_{j,k}E_{i,l}$, il est clair que :

$$T(\sigma)(E_{1,2}\otimes ...\otimes E_{p,1}\otimes \mathrm{id}_p^{\otimes q})T(\sigma)(\mathrm{id}_q^{\otimes p}\otimes E_{1,2}\otimes ...\otimes E_{q,1})\neq 0$$

si et seulement si $g^{-1}(1)<g^{-1}(2)<...<g^{-1}(p)$ et $g^{-1}(p+\omega(1))<...<g^{-1}(p+\omega(q))$ pour une permutation cyclique ω de Σ_q (*i.e.* ω est une puissance du cycle $(1.2...q)$). L'ensemble de ces g sera noté G. Mais, de toute façon,

$$T(\sigma)(E_{1,2}\otimes ...\otimes E_{p,1}\otimes \mathrm{id}_p^{\otimes q})T(\sigma)(\mathrm{id}_q^{\otimes p}\otimes E_{1,2}\otimes ...\otimes E_{q,1})\in\{0,1\}$$

donc la classe de X correspond à la classe de

$$\sum_{g\in G}(g(1),g(2),...,g(p+q))\otimes(a_1,...,a_p,a_{p+1},...,a_{p+q})\otimes 1.$$

Mais

$$\begin{aligned}&(g(1),g(2),...,g(p+q))\otimes(a_1,...,a_p,a_{p+1},...,a_{p+q})\otimes 1\\&=g\tau_{p+q}g^{-1}\otimes(a_1,...,a_p,a_{p+1},...,a_{p+q})\otimes 1\\&=\tau_{p+q}.g^{-1}\otimes(a_1,...,a_p,a_{p+1},...,a_{p+q}).gg^{-1}\otimes 1\\&\text{(le point . désignant les actions décrites plus haut)}\\&=\tau_{p+q}\otimes(a_{g(1)},...,a_{g(p+q)})\otimes\mathrm{sgn}(g).\end{aligned}$$

Donc la classe de X correspond à la classe de

$$\sum_{g\in G}\mathrm{sgn}(g)(a_{g(1)},...,a_{g(p+q)}).$$

Pour terminer la démonstration, il suffit alors de se rappeler l'expression de B et du shuffle-produit sur $C_*(A)$. □

Remarque. — On rappelle que $H_n\mathfrak{gl}_n(A)\cong H_n\mathfrak{gl}_\infty(A)$ [LQ], ce qui a implicitement servi pour cette dernière démonstration.

III. L'HOMOLOGIE DES GROUPES

1. Les groupes $H_*GL_\infty(A)$.

On peut remplacer l'homologie cyclique $HC_{*-1}(A)$ munie du produit de Loday-Quillen par la K-théorie algébrique $K_*(A)$ (de Quillen) munie du produit de Loday [L]. Les groupes $H_*\mathfrak{gl}_\infty(A)$ deviennent alors les groupes $H_*GL_\infty(A)$. On a alors le

THÉORÈME 3.1.

1) *L'algèbre de Hopf $SK_*(A)$ est munie d'un et un seul surproduit tel que sa restriction à la partie primitive (i.e. à la K-théorie algébrique) coïncide avec le produit de Loday.*

2) *Le produit tensoriel de matrices induit sur l'algèbre de Hopf $H_*GL_\infty(A)$ un surproduit.*

3) *Les deux objets en anneau de la catégorie des cogèbres $H_*GL_\infty(A)$ et $SK_*(A)$ sont isomorphes.*

Esquisse de preuve. — Pour 2), il suffit de prendre les morphismes de groupes correspondant aux morphismes d'algèbres de Lie $f_{p,q}$ et $g_{p,q}$. Il suffit ensuite de suivre la même méthode. La partie 3) découle du fait que le produit de Loday est lui-même défini à partir du produit tensoriel de matrices. □

2. Lien avec [Hu].

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{L}$ deux objets en anneau de la catégorie des k-cogèbres sur un anneau k quelconque. On sait que le k-module $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}$ est muni canoniquement d'une structure d'algèbre de Hopf [Ab].

THÉORÈME 3.2 (Produit tensoriel et croisé d'objets en anneau). — *Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{L}$ deux objets en anneau sur un anneau k quelconque.*

(i) *L'algèbre de Hopf $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}$ est munie canoniquement d'un surproduit de la façon suivante ($x, z \in \mathcal{H}$ et $y, t \in \mathcal{L}$) : $(x \otimes y) \tilde{\otimes} (z \otimes t) = (x \tilde{\otimes} z) \otimes (y \tilde{\otimes} t)$. On notera cet objet en anneau $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}$.*

(ii) *Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$, l'algèbre de Hopf $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}$ est munie canoniquement d'un surproduit de la façon suivante ($x, z \in \mathcal{H}$ et $y, t \in \mathcal{L}$) :*

$$(x\otimes y)\,\tilde{\otimes}\,(z\otimes t) = \sum_{(x)(y)(z)(t)} (x_{(1)}\,\tilde{\otimes}\,z_{(1)})\otimes((x_{(2)}\,\tilde{\otimes}\,t_{(1)})(y_{(1)}\,\tilde{\otimes}\,z_{(2)})(y_{(2)}\,\tilde{\otimes}\,t_{(2)})).$$

On notera cet objet en anneau $\mathcal{H} \ltimes \mathcal{L}$. □

Si R est un anneau, on note usuellement $\mathbb{Z} \ltimes R$ l'anneau défini de la manière suivante. Ensemblistement c'est $\mathbb{Z} \times R$ avec $(m,r)+(n,s) = (m+n, r+s)$ et $(m,r)(n,s) = (mn, ms+nr+rs)$. Alors $k[\mathbb{Z}] \ltimes k[R] \cong k[\mathbb{Z} \ltimes R]$ en tant qu'objet en anneau, l'isomorphisme faisant correspondre $[m] \otimes [r]$ de $k[\mathbb{Z}] \ltimes k[R]$ avec $[(m,r)]$ de $k[\mathbb{Z} \ltimes R]$.

On dispose maintenant d'une méthode pour ajouter un neutre à un surproduit qui n'en a pas. En effet, si $\mathcal{H}$ est un objet en anneau tel que le surproduit soit sans unité, il suffit de considérer $k[\mathbb{Z}] \ltimes \mathcal{H}$ qui est $k[\mathbb{Z}] \otimes \mathcal{H}$ en tant qu'algèbre de Hopf et dont le surproduit est défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&([m] \otimes x)\,\tilde{\otimes}\,([n] \otimes y) \\
&\quad = \sum_{(x)(y)} [mn] \otimes (x_{(1)} \dots x_{(n)} y_{(1)} \dots y_{(m)} (x_{(n+1)}\,\tilde{\otimes}\,y_{(m+1)}))\ (m \geq 0, n \geq 0), \\
&([m] \otimes x)\,\tilde{\otimes}\,([n] \otimes y) = \sum_{(x)(y)} [mn] \otimes (S(x_{(1)}) \dots \\
&\qquad\qquad S(x_{(-n)}) y_{(1)} \dots y_{(m)} (S(x_{(-n+1)})\,\tilde{\otimes}\,y_{(m+1)}))\ (m \geq 0, n < 0), \\
&([m] \otimes x)\,\tilde{\otimes}\,([n] \otimes y) = \sum_{(x)(y)} [mn] \otimes (x_{(1)} \dots x_{(n)} S(y_{(1)}) \dots \\
&\qquad\qquad S(y_{(-m)})(x_{(n+1)}\,\tilde{\otimes}\,S(y_{(-m+1)})))(m < 0, n \geq 0), \\
&([m] \otimes x) \otimes ([n] \otimes y) = \sum_{(x)(y)} [mn] \otimes (S(x_{(1)}) \dots \\
&\quad S(x_{(-n)}) S(y_{(1)}) \dots S(y_{(-m)}) (S(x_{(-n+1)})\,\tilde{\otimes}\,S(y_{(-m+1)})))\ (m < 0, n < 0).
\end{aligned}$$

Le neutre du surproduit est alors $[1] \otimes 1 = e$ (le neutre du produit étant $[0] \otimes 1 = 1$). Il est clair que $k[\mathbb{Z}] \ltimes \mathcal{H}$ est le plus petit objet en anneau (au sens d'une propriété universelle) contenant $\mathcal{H}$ et ayant un neutre pour son surproduit.

Nous pensons que l'on a l'isomorphisme d'objets en anneau suivant (k étant un corps de caractéristique zéro) :

$$k[\mathbb{Z}] \ltimes H_*(GL_\infty(A), k) \cong H_*\left(\Omega B\left(\prod_{n\geq 1} BGL_n(A)\right), k\right) \quad \text{(cf. [Hu])}$$

sans avoir été capable de le vérifier. Notre intuition vient du fait que

$$\Omega B\left(\prod_{n\geq 1} BGL_n(A)\right)$$

est homotopiquement équivalent à $\mathbb{Z} \times BGL_\infty(A)$ en tant qu'objet en groupe [Hu] (*i.e.* dans notre contexte les groupes d'homologie associés sont isomorphes) et du fait que l'ajout d'une unité au surproduit d'un objet en anneau $\mathcal{H}$ (en considérant $k[\mathbb{Z}] \ltimes \mathcal{H}$) vérifie une propriété universelle évidente ($k[\mathbb{Z}] \ltimes \mathcal{H}$ n'est pas trop «gros»).

BIBLIOGRAPHIE

[Ab] E. ABE, Hopf algebras, Cambridge University Press 74, 1977.

[Bo] N. BOURBAKI, Algèbre, tome 1, Hermann.

[G] P. GAUCHER, Produit tensoriel de matrices et homologie cyclique, C.R.A.S, t.312, Série (I 1991), 13-16.

[G'] P. GAUCHER, Lambda-opération et homologie des matrices, C.R.A.S., t.313, Série I, n°10 (1991), 663-666.

[Hu] D. HUSEMOLLER, Homology of Certain H-Spaces as Group Ring Objects, Algebra, Topology and Category Theory, A collection of papers in Honor of Samuel Eilenberg, Academic Press INC., New York San Francisco London (1976), 309-377.

[L] J-L. LODAY, K-théorie algébrique et représentation de groupes, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t.9 (1976), 309-377.

[L'] J-L. LODAY, Cyclic Homology, Grund.math.Wiss. 301, Springer, 1992.

[LQ] J-L. LODAY, D. QUILLEN, Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices, Comment. Math. Helvetici, 59 (1984), 565-591.

[M] S. MCLANE, Homology, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1967.

[MM] J W. MILNOR, J C. MOORE, On the structure of Hopf algebra, Ann.of Math., 81 (1965), 211-264.

[S] M.E. SWEEDLER, Hopf algebra, New York, W.A. Benjamin, Inc, 1969.

[Ta] D. TANRE, Homotopie rationnelle et Modèle de Chen Quillen Sullivan, L.N.1025, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, New-York Tokyo, 1983.

Manuscrit reçu le 16 novembre 1992.

Philippe GAUCHER,
Institut de Recherche Mathématique
Avancée
ULP et CNRS
7 rue René-Descartes
67084 Strasbourg Cedex (France).