Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique

Algèbre homologique/*Homological Algebra*

Produit tensoriel de matrices et homologie cyclique

Philippe GAUCHER

Résumé — Si A est une $\mathbb{Q}$-algèbre unitaire associative et commutative, le produit tensoriel de matrices permet de définir sur $H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A), \mathbb{Q})$ un produit qui, avec la somme usuelle, en fait un anneau gradué commutatif. On donne une formule explicite de ce produit à partir de sa restriction à la partie primitive et on montre que cette restriction coïncide avec le produit de Loday-Quillen sur l'homologie cyclique.

Tensor product of matrices and cyclic homology

Abstract — *If* A *is an associative and commutative* $\mathbb{Q}$*-algebra with unit, the tensor product of matrices enables us to define on* $H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A), \mathbb{Q})$ *a product which gives it with the usual sum a graded ring structure which is commutative. One gives an explicit formula for this product. After restriction to the primitive part, this product coincides with the Loday-Quillen's product on cyclic homology.*

0. INTRODUCTION. — On se place en caractéristique 0 et A et A′ désignent des $\mathbb{Q}$-algèbres associatives avec unité. Dans le cas où $p=\infty$, $H_*(\mathfrak{gl}_p(A))$, où $\mathfrak{gl}_p(A)$ désigne l'algèbre de Lie des matrices carrées de taille p à coefficients dans A, possède usuellement une structure d'algèbre de Hopf, le produit étant induit par la somme par bloc des matrices et la comultiplication étant induite par la diagonale. Sa partie primitive est isomorphe à l'homologie cyclique de A notée $HC_{*-1}(A)$ [1].

Par analogie avec le produit en K-théorie algébrique défini par J.-L. Loday [2], on construit, à partir du produit tensoriel de matrices, un produit sur l'homologie de l'algèbre de Lie des matrices. Pour cela, il est nécessaire, comme on le verra, d'avoir un $\oplus_*$ dans le sens suivant :

LEMME 0.1. — *Si* $\mathfrak{g}$ *est une algèbre de Lie et* f *et* g *sont deux morphismes d'algèbres de Lie de* $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{gl}_\infty(A)$, *alors le morphisme d'algèbres de Lie de* $\mathfrak{g}$ *dans* $\mathfrak{gl}_\infty(A)$ *noté* $f\oplus g$ *défini par :*

$$\begin{aligned} f\oplus g:\quad & \mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}_\infty(A)\\ & x\mapsto f(x)\oplus g(x), \end{aligned}$$

où $\oplus$ *est la somme par bloc des matrices, vérifie la propriété suivante :*
pour tout x *de* $H_*(\mathfrak{g})$, $(f\oplus g)_*(x)=\Sigma_{(x)}(f)_*(x_{(1)})(g)_*(x_{(2)})$ *où le produit est ici le produit usuel sur* $H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A))$ *avec* $\Delta(x)=\Sigma_{(x)}x_{(1)}\otimes x_{(2)}$ *où* Δ *est la comultiplication usuelle sur* $H_*(\mathfrak{g})$. □

Remarque. — On notera dans la suite $(f\oplus g)_*=(f)_*\oplus_*(g)_*$ (lire « convolée »). La convolée est encore définie même si $(f)_*$ et $(g)_*$ sont directement définis sur les groupes d'homologie sans provenir nécessairement de morphismes d'algèbres de Lie.

Dans un premier temps, on donnera la description du produit sur $H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A))$ induit par le produit tensoriel de matrices, et on en donnera une formulation explicite à partir de sa restriction sur les primitifs. La description nécessitera l'existence d'un $\ominus_*$ « opposé » du $\oplus_*$, dont la construction sera reportée à la fin de la Note. Dans un troisième temps, on démontrera la cohérence de la restriction de ce produit à la partie primitive de $H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A))$ avec le produit de Loday-Quillen sur l'homologie cyclique [1].

1. CONSTRUCTION DU PRODUIT SUR $H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A))$. — Le principe de la construction consiste à trouver un premier morphisme d'algèbres de Lie, noté $f_{p,q}$, qui jouera le rôle

Note présentée par Alain CONNES.

0764-4442/91/03120013 $ 2.00

d'une « différentielle » du morphisme de groupe de $GL_p(A) \times GL_q(A')$ dans $GL_\infty(A \otimes A')$ qui à (α, β) associe $\alpha \otimes \beta$, puis un second morphisme d'algèbres de Lie, noté $g_{p,q}$, de $gl_p(A) \times gl_q(A')$ dans $gl_\infty(A \otimes A')$ qui permettra de rendre compatible $f_{p,q}$ avec le système inductif, indexé par (p, q), convergeant vers $gl_\infty(A) \times gl_\infty(A')$.

LEMME 1.1. — (i) *Les applications définies par :*

$$f_{p,q} : gl_p(A) \times gl_q(A') \to gl_\infty(A \otimes A'), \qquad f_{p,q}(\alpha, \beta) = (\alpha \otimes \mathrm{id}_q) + (\mathrm{id}_p \otimes \beta)$$

$$g_{p,q} : gl_p(A) \times gl_q(A') \to gl_\infty(A \otimes A'), \qquad g_{p,q}(\alpha, \beta) = (\alpha \otimes \mathrm{id}_q) \oplus (\mathrm{id}_p \otimes \beta)$$

sont deux morphismes d'algèbres de Lie.

(ii) *Pour tout entier p, q, h, k (supérieur ou égal à 1),*

$$f_{p,q}(\alpha, \beta) \oplus g_{p+h,\, q+k}(\alpha \oplus 0_h, \beta \oplus 0_k) \text{ est conjugué à } f_{p+h,\, q+k}(\alpha \oplus 0_h, \beta \oplus 0_k) \oplus g_{p,q}(\alpha, \beta)$$

par une matrice qui ne dépend que des entiers p, q, h et k mais pas de α, ni de β. □

LEMME 1.2. — *Il existe une application $\mathbb{Q}$-linéaire $(h_{p,q})_*$ et une seule de* $H_*(gl_p(A) \times gl_q(A'))$ *dans* $H_*(gl_\infty(A \otimes A'))$ *de degré* 0, *naturelle par rapport à* A *et* A', *telle que*

$$(h_{p,q})_* \oplus_* (g_{p,q})_* = (f_{p,q})_*.$$

Preuve. — *Cf.* la dernière section. □

On considère alors le morphisme $(h_{p,q})_* = (f_{p,q})_* \ominus_* (g_{p,q})_*$, ce qui permet de définir (avec le lemme 0.1) un morphisme de système inductif du système inductif $(H_*(gl_p(A) \times gl_q(A')))_{p,q}$ vers le système inductif constant $H_*(gl_\infty(A))$.

Les deux lemmes qui précédent permettent donc de poser la définition suivante :

DÉFINITION 1.2. — $(h)_* = \lim.\mathrm{ind.}_{(p,q)}(h_{p,q})_*$.

On en déduit le

THÉORÈME 1.1. — *Si* A *est commutative, l'homomorphisme* $(h)_*$ *permet de définir sur* $H_*(gl_\infty(A))$ *un produit, naturel par rapport à* A, *qui munit ces groupes d'homologie d'une structure d'anneau gradué commutatif. De plus, ce produit est compatible avec la comultiplication et ne possède pas d'unité.* □

Remarque. — Ce produit n'est pas le même que le produit venant de la structure d'algèbre de Hopf. Il est défini par la composition :

$$H_*(gl_\infty(A)) \otimes H_*(gl_\infty(A)) \xrightarrow{(\text{kün})_*} H_* gl_\infty(A) \times gl_\infty(A)) \xrightarrow{(h)_*} H_*(gl_\infty(A \otimes A)) \xrightarrow{\mu_*} H_*(gl_\infty(A)),$$

où $(\text{kün})_*$ est le morphisme de Künneth et μ la multiplication de l'anneau.

2. LE LIEN AVEC LA RESTRICTION SUR LA PARTIE PRIMITIVE. — Le produit qui vient d'être construit est noté « ⊗ ». $H_*(gl_\infty(A))$ étant une algèbre de Hopf primitivement engendrée, il est naturel d'essayer de donner une expression de $(x_1 \ldots x_p)$ « ⊗ » $(y_1 \ldots y_q)$ où $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q$ sont des éléments primitifs ($p \geqq 1$ et $q \geqq 1$) en fonction des $(x_i$ « ⊗ » $y_j)$:

THÉORÈME 2.1. — *Le produit « ⊗ » vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *les $(x_i$ « ⊗ » $y_j)$ sont primitifs.*

(ii) $(x_1 \ldots x_p)$ « ⊗ » $(y_1 \ldots y_q) = 0$ *si* $p \neq q$.

(iii) $(x_1 \ldots x_p)$ « ⊗ » $(y_1 \ldots y_p) = \sum \varepsilon(\sigma)(x_{\sigma(1)}$ « ⊗ » $y_1) \ldots (x_{\sigma(p)}$ « ⊗ » $y_p)$ *où* σ *décrit* $\mathfrak{S}_p$ *et* $\varepsilon(\sigma)$ *désigne le signe tel que* $x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(p)} y_1 \ldots y_p = \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} y_1 \ldots x_{\sigma(p)} y_p$. □

COROLLAIRE. — *Sur* $H_*(gl_\infty(\mathbb{Q}))$, *le produit « ⊗ » est trivial.* □

3. Cohérence des deux produits sur la partie primitive. — Sur l'homologie cyclique en caractéristique 0 le produit de Loday-Quillen [1] est défini de la façon suivante : $C_*(A)$ désigne le complexe de Hochschild et

$$b(a_0, \ldots, a_n) = \sum (-1)^i (a_0, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_n) + (-1)^n (a_n a_0, \ldots, a_{n-1})$$

désigne sa différentielle. Soit t l'opérateur cyclique donné par $t(a_0, \ldots, a_n) = (-1)^n (a_n, a_0, \ldots, a_{n-1})$. On sait qu'en caractéristique 0 on a $HC_n(A) = H_n(C_*(A)/(1-t), b)$. Soit B l'opérateur de Connes de $C_n(A)$ dans $C_{n+1}(A)$ donné par $B = (1-t)s((1+t+\ldots+t^n)$ où $s(a_0, \ldots, a_n) = (1, a_0, \ldots, a_n)$. L'homologie de Hochschild est munie d'une structure d'algèbre associative sur A, strictement graduée, avec le shuffle-produit :

$$(a, a_1, \ldots, a_p).(a', a_1, \ldots, a_q) = \sum \operatorname{sgn}(\sigma)(aa', a_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, a_{\sigma^{-1}(p+q)})$$

où la somme s'étend à tous les (p, q)-shuffles σ de $\mathfrak{S}_{p+q}$. Le produit de Loday-Quillen est donné par la formule suivante : à x et y dans $C_*(A)$, on associe $x.By$ et on peut démontrer que cela a un sens sur $HC_*(A)$.

L'isomorphisme entre homologie cyclique et partie primitive est induit par l'application qui à $(a_0, \ldots, a_n)$ associe $a_0 E_{1,2} \wedge \ldots \wedge a_n E_{n+1,1}$ [où $E_{i,j}$ est la matrice qui a un 1 en position (i,j) et 0 ailleurs]. Elle envoie $HC_n(A)$ sur $H_{n+1}(\mathfrak{gl}_\infty(A))$ (remarquer le décalage des indices).

Théorème 3.1. — *La restriction à la partie primitive du produit « $\otimes$ » défini à la section* 1 *coïncide avec le produit de Loday-Quillen sur l'homologie cyclique.*

Esquisse de preuve. — On remarque d'abord que

$$\operatorname{Prim}((h_{p,q})_* \oplus_* (g_{p,q})_*) = \operatorname{Prim}((f_{p,q})_*)$$

implique que

$$\operatorname{Prim}((h_{p,q})_*) + \operatorname{Prim}((g_{p,q})_*) = \operatorname{Prim}((f_{p,q})_*) \quad \text{(lemme 0.1).}$$

Puis on remarque que $\operatorname{Prim}((g_{p,q})_*) = 0$ car les éléments de Im $\operatorname{Prim}((g_{p,q})_*)$ sont des produits (au sens de la structure d'algèbre de Hopf) d'au moins 2 éléments primitifs. Il suffit donc de considérer $\operatorname{Prim}((f_{p,q})_*)$.

La suite de la démonstration consiste à réécrire $\operatorname{Prim}((f_{p,q})_*)$ en utilisant l'expression de l'homologie cyclique à l'aide des groupes symétriques (*cf.* la proposition 6.6 de [1]). □

4. Construction du $\ominus$.

Proposition 4.1. — *Si $\mathfrak{gl}_p$ et $\mathfrak{gl}_\infty$ désignent les deux foncteurs classiques allant de la catégorie des $\mathbb{Q}$-algèbres associatives non nécessairement unitaires dans la catégorie des algèbres de Lie, si f et g sont deux morphismes de foncteurs de $\mathfrak{gl}_p$ vers $\mathfrak{gl}_\infty$, alors il existe un unique morphisme de foncteur $(k)_*$ de $H_*(\mathfrak{gl}_p)$ vers $H_*(\mathfrak{gl}_\infty)$ tel que $(k)_* \oplus_* (f)_* = (g)_*$.*

Remarque. — Il y a un résultat identique si on considère le foncteur $\mathfrak{gl}_p \times \mathfrak{gl}_q$ au lieu de $\mathfrak{gl}_p$. C'est en fait ce dernier résultat qui nous sert pour la construction du produit.

Lemme 4.1. — *La proposition ci-dessus est vraie si $p = \infty$ (de façon fonctorielle).*

Preuve du lemme 4.1. — Cela tient essentiellement au fait que

$$H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A)) = U(\operatorname{Prim} H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A))),$$

où U est le foncteur « algèbre enveloppante » pour les algèbres de Lie graduées (théorème de Milnor-Moore). On fait alors une démonstration de l'existence et de l'unicité par récurrence sur la « longueur » des éléments de $H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A))$. □

Preuve de la proposition 4.1. — Tout le problème est que $H_*(\mathfrak{gl}_p(A))$ ne possède pas en général de structure d'algèbre de Hopf, car il n'y a pas un nombre infini d'indices. La technique consiste à se ramener au cas favorable (lemme 4.1) en considérant l'anneau non unitaire $M_\infty(A) = \lim.\mathrm{ind.}_n M_n(A)$ et l'injection i, naturelle par rapport à A, de A dans $M_\infty(A)$ définie par : $i(x)$ est la matrice infinie qui a x en première ligne et première colonne et zéro partout ailleurs. C'est un morphisme d'anneaux non unitaires.

On considère alors le diagramme suivant, qui est commutatif à cause de la naturalité de f et g :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{gl}_p(M_\infty(A)) & \xrightarrow{f^{M_\infty},\, g^{M_\infty}} & \mathfrak{gl}_\infty(M_\infty(A)) \\ {\scriptstyle \mathfrak{gl}_p(i)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathfrak{gl}_\infty(i)} \\ \mathfrak{gl}_p(A) & \xrightarrow[f,\, g]{} & \mathfrak{gl}_\infty(A) \end{array}$$

$\mathfrak{gl}_\infty(i)$ induisant un isomorphisme en homologie [2].

On démontre alors en s'inspirant de [2] que $H_*(\mathfrak{gl}_p(M_\infty(A)) = H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A))$ par un isomorphisme naturel par rapport à A. Alors, d'après le lemme 4.1, il existe $(f^{M_\infty})_*$ vérifiant

$$(k^{M_\infty})_* \oplus_* (f^{M_\infty})_* = (g^{M_\infty})_*.$$

Puis on pose $(k)_* = (k^{M_\infty})_* \circ (\mathfrak{gl}_p(i))_*$ (toute la construction est naturelle par rapport à A). On remarque alors que $(\mathfrak{gl}_p(i))_*$ est un morphisme de cogèbres : il en découle que l'on a bien

$$(k)_* \oplus_* (f)_* = (g)_*.$$

Pour l'unicité, si k' est un deuxième foncteur solution, alors le lemme 4.1 implique que

$$(k'^{M_\infty})_* = (k^{M_\infty})_*$$

puis, par naturalité, on obtient :

$$(k)_* = (k^{M_\infty})_* \circ (\mathfrak{gl}_p(i))_*,$$
$$(k')_* = (k'^{M_\infty})_* \circ (\mathfrak{gl}_p(i))_*,$$

d'où $k' = k$. □

Ainsi donc, pour achever la construction du produit, il suffit de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 4.2. — *Les morphismes d'algèbres de Lie $f_{p,q}$ et $g_{p,q}$ sont naturels par rapport à* A *et* A'. □

On peut déduire de ce qui précède le

COROLLAIRE [3]. — *Avec les notations de* [3], *les $(\Lambda_n^k)_*$ sont naturels, et on obtient donc sur $H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A))$ des lambda-opérations, dont la restriction à la partie primitive redonne la structure de lambda-anneau usuelle sur l'homologie cyclique.* □

Note remise le 13 septembre 1990, acceptée le 9 octobre 1990.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] J.-L. LODAY et D. QUILLEN, Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices, *Comment. Math. Helvetici*, 59, 1984, p. 565-591.

[2] J.-L. LODAY, K-théorie et représentation des groupes, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, 9, 1976, p. 309-377.

[3] J.-L. LODAY et C. PROCESI, *Cyclic homology and Lambda-operations*, J. F. JARDINE et V. P. SNAITH éd., *Algebraic K-theory: Connections with Geometry and Topology*, 1989, p. 209-224, Kluwer Academic Publishers.

[4] J. MILNOR et J. C. MOORE, On the structure of Hopf Algebra, *Annals of Math.*, 81, 1965, p. 211-264.

Institut de Recherche mathématique avancée, Université Louis-Pasteur et C.N.R.S.,
7, rue Descartes, 67084 *Strasbourg.*