etienne.miquey[at]ens-lyon.fr

Preuves formelles (1/2)

1 Soyons logiques

"*Tous les chats aiments le poisson, Platon aime le poisson, donc Platon est un chat.*" Syllogisme classique s'il en est, ce genre d'exemple est révélateur de la traîtreuse valeur que peut prendre un *donc*. Car après tout, qu'est-ce qu'une preuve, si ce n'est une tentative de convaincre ? Et quelle valeur peut-on accorder à un enchaînement d'arguments en apparence logique, mais pas formellement instanciés les uns par rapport aux autres ? C'est le but de ce qu'on appelle une preuve formelle d'être absolument hors de tout soupçon de tentative (volontaire ou non) d'arnaque, et de mécaniser les procéder qui y sont liés.

2 Quelques connecteurs

On va essayer d'introduire au fur et à mesure tous les connecteurs auxquels vous êtes habitués (potentiellement sans le savoir) dans votre vie de mathématicien de tous les jours. Le premier d'entre tous, et celui à choisir s'il ne devait en rester qu'un (on peut quasiment tout faire avec, c'est le principe du système de déduction à la Hilbert), est l'implication : $A \Rightarrow B$. En théorie, c'est au programme de première je crois, donc vous devriez bien le connaître, au pire lisez-le comme "$Si\ A\ alors\ B$". Parmi les choses que vous maîtrisez, nous noterons $\wedge$ le *et* et $\vee$ le *ou*.

La seule chose dont il faut vous assurer, c'est que l'on parle bien des mêmes. Du coup, pour mettre tout le monde d'accord, des petites tables de vérité sur ce que sont censés représenter ces connecteurs pour vous.

		B	
		Vraie	Faux
A	Vraie	V	F
	Faux	V	V

$A \Rightarrow B$

		B	
		Vraie	Faux
A	Vraie	V	F
	Faux	F	F

$A \wedge B$

		B	
		Vraie	Faux
A	Vraie	V	V
	Faux	F	F

$A \vee B$

Si vous êtes au clair avec cela, le reste devrait globalement couler de source, ou presque. Dernières notations du jour à introduire, la négation et le faux. On note le faux $\perp$ (par opposition à $\top$ pour le vrai). On définit la négation $\neg A$ comme étant l'implication du faux, c'est-à-dire que $Non\ A$ sera en fait $si\ A\ alors\ faux$:

$$\neg P \equiv P \Rightarrow \perp$$

Maintenant que vous être armés de tous les symboles nécessaires, on peut commencer à voir les règles d'inférences

3 Les règles du jeu

En guise de petit rappel, une règle d'inférence est un machin de cette tête là...

$$\frac{Hypothèses_1 \vdash Résultat_1 \qquad Hypothèses_2 \vdash Résultat_2 \qquad ...}{Hypothèses \vdash Résultat}\ \texttt{Nom de la règle}$$

... qui se lit : "si, sous les hypothèses1, j'ai prouvé le résultat1, sous les hypothèses2 le résultat2, etc... alors je peux en déduire sous les hypothèses finales le résultat final." et qui va nous permettre de construire des arbres de preuves en les empilant.

3.1 L'axiome de base

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ \texttt{ax}$$

3.2 Implique

Il y a deux règles, les plus faciles, une pour l'introduction, qui consiste à passer le prémisse dans les hypothèses, et une pour l'élimination, connue sous le doux nom de *modus ponens*. Normalement, celles-ci ne devrait pas vous poser de grosses difficultés.

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \Rightarrow -\text{intro} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \texttt{Modus Ponens}$$

3.3 Et

Trois règles cettes fois-ci, encore plus naturelles : pour prouver $A \wedge B$, je dois prouver A et B. Et si j'ai prouvé $A \wedge B$, je peux en déduire A (ou B) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge\texttt{-intro} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge - \text{elim}_{\text{g}} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \wedge - \text{elim}_{\text{d}}$$

3.4 Ou

Les deux règles d'introduction sont enfantines. L'élimination est plus complexe : cela consiste à dire que l'on sait que l'on a $A \vee B$, mais on ne sait pas lequel. Du coup, pour prouver un résultat R, on vérifie qu'on l'a bien dans le cas où on a A, puis dans le cas où l'on a B, et là, en ayant prouver $A \vee B$, on peut donc en déduire R :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee - \text{intro}_{\text{g}} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee - \text{intro}_{\text{d}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash R \qquad \Gamma, B \vdash R \qquad \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash R} \vee - \text{elim}$$

3.5 Non

Pour le faux, une seule et unique règle : si l'on a prouvé le $faux$, on peut en déduire n'importe quoi (cela signifie que l'on a aboutit à une contradiction) :

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A} \bot - \text{elim}$$

Des exemples :

Montrons par exemple que $A \wedge B \Rightarrow B \wedge A$ et $A \wedge B \Rightarrow B \vee A$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\texttt{ax}}{A \wedge B \vdash B} \wedge - \text{elim}_{\text{g}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\texttt{ax}}{A \wedge B \vdash A} \wedge - \text{elim}_{\text{g}}}{A \wedge B \vdash B \wedge A} \wedge\texttt{-intro}}{\vdash A \wedge B \Rightarrow B \wedge A} \Rightarrow -\text{intro} \qquad \Bigg| \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\texttt{ax}}{A \wedge B \vdash A} \wedge - \text{elim}_{\text{g}}}{A \wedge B \vdash B \vee A} \vee\texttt{-intro}}{\vdash A \wedge B \Rightarrow B \vee A} \Rightarrow -\text{intro}$$

4 Pour la route

Un petit exercice, réponse au prochain épisode.

Exercice 1 (Loi de De Morgan). *Quels liens pouvez-vous établir entre :*

- $\neg(A \wedge B)$
- $\neg A \wedge \neg B$
- $\neg(A \vee B)$
- $\neg A \vee \neg B$

Essayez de faire les preuves correspondantes !

To be continued...