MPRI 2–2 TD 1 du 16/12/2016

Thomas Ehrhard

On rappelle la syntaxe des types et des termes du langage PCF considéré dans le cours.

$$\sigma, \tau \ldots := \iota \mid \sigma \Rightarrow \tau$$
$$M, N, P \ldots := \underline{n} \mid x \mid \lambda x^\sigma\, M \mid (M)\, N \mid \mathsf{succ}(M) \mid \mathsf{pred}(M) \mid \mathsf{if}(M, N, P) \mid \mathsf{fix}(M)$$

On rappelle le système de typage sémantique de PCF dans les espaces cohérents. Un contexte sémantique est une suite $\Phi = (x_1 : u_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : u_k : \sigma_k)$ où les variables $x_1,\ldots,x_k$ sont 2 à 2 distinctes, les σ_j sont des types et $u_j \in \mathsf{Cl}_{\mathsf{fin}}([\sigma_j])$. On note $\underline{\Phi}$ le contexte de typage sous-jacent qui est $(x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k)$. Si $\Phi_i = (x_1 : u_1^i : \sigma_1, \ldots, x_k : u_k^i : \sigma_k)$ (pour $i = 1, \ldots, n$) sont des contextes sémantiques de même contexte de typage sous-jacent, alors on note

$$\Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_n = (x_1 : u_1^1 \cup \cdots \cup u_1^n : \sigma_1, \ldots, x_k : u_k^1 \cup \cdots \cup u_k^n : \sigma_k)$$

ce qui n'a un sens que si $u_1^j \cup \cdots \cup u_j^n \in \mathsf{Cl}([\sigma_j])$ pour $j = 1, \ldots, k$. Quand on utilise cette expression $\Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_n$, cela signifie qu'on fait en plus l'hypothèse que cette expression a un sens. On pose $\emptyset_\Gamma = (x_1 : \emptyset : \sigma_1, \ldots, x_k : \emptyset : \sigma_k)$ si $\Gamma = (x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k)$ est un contexte de typage. Voici les règles de déduction:

$$\frac{}{x_1 : \emptyset : \sigma_1, \ldots, x_j : \{a\} : \sigma_j, \ldots, x_k : \emptyset : \sigma_k \vdash x_j : a : \sigma_j} \qquad \frac{}{\emptyset_\Gamma \vdash \underline{n} : n : \iota}$$

$$\frac{\Phi, x : u : \sigma \vdash M : b : \tau}{\Phi \vdash \lambda x^\sigma\, M : (u, b) : \tau} \qquad \frac{\Phi_0 \vdash M : (\{a_1, \ldots, a_n\}, b) : \sigma \Rightarrow \tau \qquad \Phi_i \vdash N : a_i : \sigma \text{ pour } i = 1, \ldots, n}{\bigcup_{i=0}^n \Phi_i \vdash (M)\, N : b : \tau}$$

$$\frac{\Phi \vdash M : n : \iota}{\Phi \vdash \mathsf{succ}(M) : n+1 : \iota} \qquad \frac{\Phi \vdash M : n : \iota}{\Phi \vdash \mathsf{pred}(M) : \max(n-1, 0) : \iota}$$

$$\frac{\Phi_0 \vdash M : 0 : \iota \qquad \Phi_1 \vdash P_1 : a : \sigma \qquad \underline{\Phi_0} \vdash P_2 : \sigma \text{ et } \underline{\Phi_0} = \underline{\Phi_1}}{\Phi_0 \cup \Phi_1 \vdash \mathsf{if}(M, P_1, P_2) : a : \sigma}$$

$$\frac{\Phi_0 \vdash M : n+1 : \iota \qquad \Phi_2 \vdash P_2 : a : \sigma \qquad \underline{\Phi_0} \vdash P_1 : \sigma \text{ et } \underline{\Phi_0} = \underline{\Phi_2}}{\Phi_0 \cup \Phi_2 \vdash \mathsf{if}(M, P_1, P_2) : a : \sigma}$$

$$\frac{\Phi_0 \vdash M : (\{a_1, \ldots, a_n\}, a) : \sigma \Rightarrow \sigma \qquad \Phi_i \vdash \mathsf{fix}(M) : a_i : \sigma \text{ pour } i = 1, \ldots, n}{\bigcup_{i=0}^n \Phi_i \vdash \mathsf{fix}(M) : a : \sigma}$$

1) Calculer la sémantique cohérente des termes clos suivante

- $\lambda x^\iota\, \mathsf{succ}(x)$
- $\Omega^\sigma = \mathsf{fix}(\lambda x^\sigma\, x)$
- $\lambda x^\iota\, \lambda y^\iota\, \mathsf{if}(x, y, \underline{0})$
- $\lambda x^\iota\, \mathsf{if}(x, \mathsf{if}(x, \underline{0}, \underline{1}), \underline{2})$. Commentaire?
- $\lambda x^\iota\, \mathsf{fix}(\lambda a^{\iota \Rightarrow \iota}\, \lambda y^\iota\, \mathsf{if}(y, x, \mathsf{succ}((a)\, \mathsf{pred}(y))))$

2) 2.1) Donner le type du terme clos

$$M = \lambda f^{\iota \Rightarrow \iota}\, (\mathsf{fix}(\lambda r^{\iota \Rightarrow \iota}\, \lambda x^\iota\, \mathsf{if}((f)\, x, x, (g)\, \mathsf{succ}(x))))\, \underline{0}\,,$$

et expliquer ce qu'il fait.

2.2) Soit S l'ensemble des suites finies d'entiers non nuls (indexées à partir de 0 si bien que, si $\alpha \in S$, on a $\alpha = \langle \alpha_0, \ldots, \alpha_{\mathsf{len}(\alpha)-1} \rangle$ où $\mathsf{len}(\alpha)$ est la longueur de α). On définit aussi l'ensemble

$$\mathsf{t}(\alpha) = \{(0, \alpha_0), \ldots, (\mathsf{len}(\alpha) - 1, \alpha_{\mathsf{len}(\alpha)-1}), (\mathsf{len}(\alpha), 0)\}$$

2.3) Montrer que l'ensemble $w = \{(\mathsf{t}(\alpha), \mathsf{len}(\alpha)) \mid \alpha \in S\}$ appartient à $\mathsf{Cl}([(\iota \Rightarrow \iota) \Rightarrow \iota])$.

2.4) Montrer que $w \subseteq [M]$. Ces deux ensembles sont-ils égaux? Sinon quels sont les éléments qui manquent?

3) Soient X, Y et Z des espaces cohérents. Soient $f : \mathsf{Cl}(X) \to \mathsf{Cl}(Y)$ et $g : \mathsf{Cl}(Y) \to \mathsf{Cl}(Z)$ des fonctions stables. Montrer que

$$\begin{aligned}\mathsf{Tr}(g \circ f) = \{(u_1 \cup \cdots \cup u_n, c) \in \mathsf{Cl}_{\mathsf{fin}}(X) \times |Z| \mid \exists n \in \mathbb{N} \\ \exists b_1, \ldots, b_n\, \forall i\ (u_i, b_i) \in \mathsf{Tr}(f) \text{ et } (\{b_1, \ldots, b_n\}, c) \in \mathsf{Tr}(g)\}\,.\end{aligned}$$

4) Soit X un espace cohérent. On rappelle qu'on a défini l'opérateur de point fixe comme une fonction stable $\mathcal{Y}_X : (X \Rightarrow X) \to X$ dont la trace est donnée par

$$\mathsf{Tr}(\mathcal{Y}_X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{Y}_X^{(n)}$$

où $\mathcal{Y}_X^{(n)} \in \mathsf{Cl}((X \Rightarrow X) \Rightarrow X)$ est défini par récurrence:

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_X^{(0)} &= \emptyset \\ \mathcal{Y}_X^{(n+1)} &= \{(u_1 \cup \cdots \cup u_k \cup \{(\{a_1, \ldots, a_k\}, a)\}, a) \in |(X \Rightarrow X) \Rightarrow X| \mid \forall i\ (u_i, a_i) \in \mathcal{Y}_X^{(n)}\}\end{aligned}$$

Par récurrence sur n, montrer qu'on a bien $\mathcal{Y}_X^{(n)} \in \mathsf{Cl}((X \Rightarrow X) \Rightarrow X)$.

5) Si X et Y sont des espaces cohérents, un isomorphisme entre X et Y est une fonction linéaire qui est un isomorphisme au sens général des catégories. De façon équivalente, c'est une bijection $\varphi : |X| \to |Y|$ telle que $\forall a, a' \in |X|\ a \frown_X a' \Leftrightarrow \varphi(a) \frown_Y \varphi(a')$.

Si X et Y sont des espaces cohérents, on dira que X est un sous-espace de Y et on écrira $X \sqsubseteq Y$ si $|X| \subseteq |Y|$ et

$$\forall a, a' \in |X| \quad a \frown_X a' \Leftrightarrow a \frown_Y a'$$

autrement dit Y est une "extension conservative" de X.

5.1) Vérifier que $\sqsubseteq$ est une relation d'ordre sur les espaces cohérents et que la classe des espaces cohérents ordonnée par cette relation, qu'on note $\mathbf{Coh}^{\sqsubseteq}$, est complète au sens où toute famille dénombrable d'espaces cohérents $\mathcal{X}$ qui est filtrante pour $\sqsubseteq$ a un sup qu'on notera $Z = \bigsqcup \mathcal{X}$ qui est donné par:

$$|Z| = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} |X| \quad \text{et} \quad \forall a, a' \in |Z| \quad a \frown_Z a' \text{ ssi } \exists X \in \mathcal{X}\ a \frown_X a'$$

5.2) Montrer que *toutes* les opérations vues en cours sur les espaces cohérents sont croissantes et continues par rapport à cette relation d'ordre. Par exemple:

- $X \sqsubseteq X' \Rightarrow X^\perp \sqsubseteq X'^\perp$ et si $\mathcal{X}$ est un ensemble $\sqsubseteq$-filtrant d'espaces cohérents, on a $(\bigsqcup \mathcal{X})^\perp = \bigsqcup_{X \in \mathcal{X}} X^\perp$.
- $(X \sqsubseteq X' \text{ et } Y \sqsubseteq Y') \Rightarrow X \otimes Y \sqsubseteq X' \otimes Y'$ et si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont des ensembles $\sqsubseteq$-filtrants d'espaces cohérents on a $\bigsqcup_{X \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{Y}} X \otimes Y = \bigsqcup \mathcal{X} \otimes \bigsqcup \mathcal{Y}$.

5.3) Soit N l'espace cohérent des "entiers plats", c'est-à-dire que $|\mathsf{N}| = (\mathbb{N}, =)$. Soit X un espace cohérent. Donner un isomorphisme entre les espaces cohérents $\mathsf{N} \multimap X$ et $X \,\&\, (\mathsf{N} \multimap X)$.

5.4) On considère l'opération Φ sur les espaces cohérents qui est définie par $\Phi(X) = (!(\mathsf{N} \multimap X))^\perp$. Montrer que, considéré comme "fonction" (classe fonctionnelle pour être ensemblistement correct) $\mathbf{Coh}^{\sqsubseteq} \to \mathbf{Coh}^{\sqsubseteq}$, Φ est croissante et Scott-continue. En déduire que Φ a un plus petit point fixe D_∞ qui est donné par $D_\infty = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \Phi^n(0)$ où 0 est l'espace cohérent à trame vide. Vérifier que $|D_\infty|$ est non vide (et en fait infini).

5.5) Montrer que les espaces cohérents D_∞ et $D_\infty \Rightarrow D_\infty$ sont isomorphes. On rappelle l'existence de l'isomorphisme de Seely entre $!(X \,\&\, Y)$ et $!X \otimes !Y$ et que $X \Rightarrow Y = !X \multimap Y = (!X \otimes Y^\perp)^\perp$.

Autrement dit D_∞ est un modèle du λ-calcul pur.

6) On considère l'opération $\Psi(X) = \mathsf{N} \otimes !X$ sur les espaces cohérents. Vérifier que c'est une opération croissante et Scott-continue sur $\mathbf{Coh}^{\sqsubseteq}$, soit S son plus petit point fixe: c'est le type des "streams" d'entiers.

6.1) Si $u \in \mathsf{Cl}(\mathsf{N})$ et $v \in \mathsf{Cl}(S)$, on note $u \cdot v = u \otimes v^!$ où $v^! = \mathcal{P}_{\text{fin}}(v)$ et le "promu" de v.

Définir deux fonctions *linéaires* $\mathsf{hd} : S \to \mathsf{N}$ et $\mathsf{tl} : S \to S$ telles que $\mathsf{hd}(u \cdot v) = u$ et $\mathsf{tl}(u \cdot v) = v$, donner les traces linéaires de ces fonctions, qui sont des cliques de $S \multimap \mathsf{N}$ et $S \multimap S$ respectivement.

6.2) Montrer que la fonction $F : \mathsf{Cl}(S \multimap \mathsf{N}) \to \mathsf{Cl}(S \multimap \mathsf{N})$ telle que, si $f \in \mathsf{Cl}(S \multimap \mathsf{N})$ est vu comme une fonction linéaire, et si $u \in \mathsf{Cl}(S)$, on ait

$$F(f)(u) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } \mathsf{hd}(u) = \{0\} \\ f(\mathsf{tl}(u)) & \text{si } \mathsf{hd}(u) = \{n+1\} \text{ pour un } n \in \mathbb{N} \\ \emptyset & \text{si } \mathsf{hd}(u) = \emptyset \end{cases}$$

est une fonction stable. On pourra donner directement la trace de F, vérifier que cette trace est bien une clique et qu'elle définit la fonction voulue.

6.3) Donner la trace du plus petit point fixe de F.