MPRI 2–2 TD 2 du 13/1/2017

Thomas Ehrhard

Indications pour la solution de la question 12.1 de la feuille de TD 2

Soit $s \in \mathbf{FSlin}_!(\mathsf{N}^I, \mathsf{N})$ et soit $f = \mathsf{Fun}\, s$. On va montrer que $f : \mathsf{qD}(\mathsf{N}^I) \to \mathsf{qD}(\mathsf{N})$ est séquentielle. Soit donc $x \in \mathsf{qD}(\mathsf{N}^I)$ tel que $f(x) = \emptyset$. Soit

$$C = \{y_0 \mid \exists n\ (y_0, n) \in s \text{ et } x \cup y_0 \in \mathsf{qD}(\mathsf{N}^I)\}\,.$$

Observer que si $y \in \mathsf{qD}(\mathsf{N}^I)$ est tel $x \subseteq y$ que $f(y) \neq \emptyset$ alors il existe exactement un $y_0 \in C$ tel que $y_0 \subseteq y$.

Si $C = \emptyset$ alors il n'y a aucun $y \supseteq x$ tel que $f(y) \neq \emptyset$ et il n'y a rien à prouver.

Si C est un singleton $C = \{y_0\}$ alors on ne peut pas avoir $y_0 \subseteq x$ car $f(x) = \emptyset$ et donc il existe $i \in I$ tel que $\mathsf{pr}_i(x) = \emptyset$ et $\mathsf{pr}_i(y_0) \neq \emptyset$ (car $y_0 \cup x \in \mathsf{qD}(\mathsf{N}^I)$). Il est clair que i est un indice de séquentialité pour f en x.

Si C est fini et a au moins 2 éléments, on a $C \notin \mathcal{C}(\mathsf{N}^I)$ (car $s \in \mathbf{FSlin}_!(\mathsf{N}^I, \mathsf{N})$) et donc il existe $i \in I$ tel que $\forall y_0 \in C\ \mathsf{pr}_i(y_0) \neq \emptyset$ et $\mathsf{pr}_i(\bigcap C) = \emptyset$, autrement dit, l'ensemble des $k \in \mathbb{N}$ tels qu'il existe $y_0 \in C$ avec $(i, k) \in y_0$ n'est pas un singleton, soient k et k' deux tels entiers est soient $y_0, y_0' \in C$ avec $(i, k) \in y_0$ et $(i, k') \in y_0'$. Alors $\mathsf{pr}_i(x) = \emptyset$ car si $(i, k'') \in x$ on doit avoir $k'' = k$ et $k'' = k'$ car $y_0 \cup x \in \mathsf{qD}(\mathsf{N}^I)$ et $y_0' \cup x \in \mathsf{qD}(\mathsf{N}^I)$. Il en résulte que i est un indice de séquentialité en x.

Finalement, supposons C infini, et soit $y_0(1), y_0(2), \dots$ une énumération sans répétitions de cet ensemble. Soit $C_n = \{y_0(1), y_0(2), \dots, y_0(n)\}$. Pour $n \geq 2$ on a $C_n \notin \mathcal{C}(\mathsf{N}^I)$. Soit I_n l'ensemble des $i \in I$ tels que $\mathsf{pr}_i(y_0) \neq \emptyset$ pour tout $y_0 \in C_n$ et $\mathsf{pr}_i(\bigcap C_n) = \emptyset$ comme ci-dessus: cet ensemble est non vide, et il est fini car les éléments de C sont finis. La suite $(\bigcap C_n)_{n \geq 2}$ est une suite décroissante d'ensembles finis, et donc il existe $m \geq 2$ tel que, pour tout $n \geq m$ on a $\bigcap C_n = \bigcap C_m$. Il résulte de la définition des I_n que la suite $(I_n)_{n \geq m}$ est une suite décroissante d'ensembles finis, tous non vides. Donc cette suite aussi finit par se stabiliser sur un ensemble J fini non vide, dont tous les éléments sont des indices de séquentialité pour f en x (on vérifie comme ci-dessus que $\mathsf{pr}_i(x) = \emptyset$ pour chaque $i \in J$).